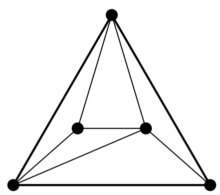
17. Berliner Tag der Mathematik 2012
Wettbewerb Stufe III: Klassen 11 bis 12/13

Aufgabe 1

Sei M eine Menge von in einem Dreieck Δ verlaufenden Strecken, über die Folgendes vorausgesetzt wird: Die Kanten von Δ gehören zu M, je zwei Strecken in M schneiden sich höchstens in ihren Endpunkten und M ist zusammenhängend, d. h. jede Strecke in M ist über weitere Strecken mit jeder anderen Strecke in M verbunden.

Beispiel:  $m_0 = 5, m_1 = 9, d = 5.$

Sei m_1 die Anzahl der Strecken in M und sei m_0 die Anzahl der Endpunkte. Dann unterteilt M das Dreieck Δ immer in $d := m_1 - m_0 + 1$ Teile. Diese Aussage kann ohne Beweis benutzt werden.

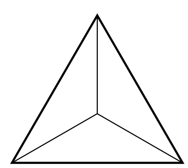
a) Eine Zerlegung von Δ in d kleine Dreiecke heißt *regulär*, falls in jedem Endpunkt gleich viele Strecken zusammenstoßen. Ein Beispiel entsteht durch Einfügen eines einzigen neuen (also vierten) Endpunktes. Welchen Wert haben dann m_1 und d? (1P)

b) Man kann die Konfiguration aus (a) auch gewinnen, indem eine dreiseitige Pyramide (Tetraeder) auf eine ihrer Seitenflächen projiziert wird. Zeichnen Sie die Konfiguration, die entsteht, wenn man das Tetraeder durch eine vierseitige Doppelpyramide (Oktaeder) ersetzt. Welche Werte haben jetzt m_0, m_1 und d? (2P)

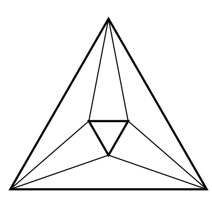
c) Man zeige, dass nur für vier verschiedene Werte von d eine solche reguläre Zerlegung existieren kann, und gebe für jeden dieser Fälle ein Beispiel. (7P)

Lösung

a) $m_0 = 4, m_1 = 6, d = 3.$



b)



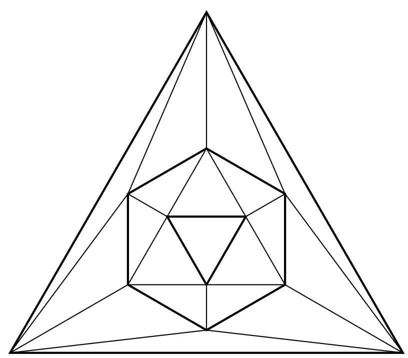
$m_0 = 6$, $m_1 = 12$, $d = 7.$

c) Bezeichne v die Valenz der Ecken, d. h. die Anzahl der dort jeweils zusammenkommenden Kanten. Jeder der m_0 Punkte ist Ecke von genau v Dreiecken, außer die drei Ecken des ursprünglichen Dreiecks. Diese sind Ecke von $v-1$ Dreicken. Außerdem enthält jedes der d Dreiecke genau 3 Punkte, nämlich die Ecken. Aus diesen Tatsachen ergibt sich folgende Gleichung: $v\,m_0 = 3d + 3 = 3(d+1)$

An jeder der m_1 Kanten liegen 2 Dreiecke und an jedem der d Dreiecke 3 Kanten, außer an den drei Kanten des ursprünglichen Dreiecks. Daher gilt: $2m_1 = 3(d+1)$

Außerdem gilt noch die „Euler-Relation“ $m_0 - m_1 + (d+1) = 2$ von (a). Insgesamt (durch Einsetzen von $m_0 = 3(d+1)/v$ und $m_1 = 3(d+1)/2$ in die Euler-Relation) erhalten wir $(d+1)(6-v) = 4v$, und daraus ergibt sich sofort $6 - v > 0$. Da andererseits auch $v \geq 2$ gilt, verbleiben für (v, d) nur die Lösungen $(5, 19)$, $(4, 7)$, $(3, 3)$ und $(2, 1)$.

Die Beispiele für die ersten drei dieser Fälle erhält man durch die Projektion von Ikosaeder (s.u.),Oktaeder=(b) und Tetraeder=(a). Der letzte Fall besteht nur aus dem ursprünglichen Dreieck und ist trivial.

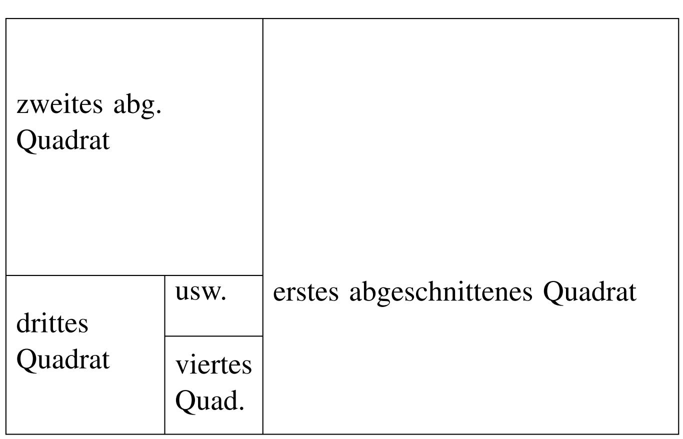


Aufgabe 2

Sei $\square_1$ ein Rechteck mit folgender Eigenschaft: Wenn wir $\square_1$ längs vor uns zu liegen haben und rechts ein maximal großes Quadrat abschneiden, so bleibt ein kleineres Rechteck $\square_2$ übrig, das dieselben Seitenverhältnisse hat wie $\square_1$, d. h. der Quotient a/b, wobei a die Seitenlänge der längeren und b die der kürzeren Seite bezeichnet, ist für $\square_1$ und $\square_2$ gleich.

a) Wenn die kürzere Seite von $\square_1$ die Länge 1 hat, wie lang ist dann die andere Seite? (2P)

b) Wenn wir das oben beschriebene Abschneiden maximaler Quadrate wiederholen und uns dabei jeweils um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn mitdrehen (vgl. Bild), so entsteht eine Folge $\square_1, \square_2, \square_3, \ldots$ von „Rest-Rechtecken“, die sukzessive ineinander enthalten sind. Der Gesamtdurchschnitt $\bigcap_{k\geq 1} \square_k$ dieser Rechtecke besteht aus nur einem Punkt P. Wo liegt dieser Punkt innerhalb des ursprünglichen Rechtecks $\square_1$? (8P)



Lösung

a) Sei $q > 1$ das Seitenverhältnis der Rechtecke $\square_k$, d. h. $q/1 = 1/(q-1)$, bzw. $q^2 - q - 1 = 0$.
Auflösen nach q ergibt $q = (\sqrt{5}+1)/2$.
Außerdem gilt: $1/q = q - 1 = (\sqrt{5}-1)/2$.

b) Variante 1: Wir nehmen an, unser Ausgangs-Rechteck $\square_1$ besitzt in $\mathbb{R}^2$ die Ecken $(0,0), (q,0), (q,1)$ und $(0,1)$.

1. Drehen wir $\square_1$ um 90^0 nach links um 0, so ergibt sich ein Rechteck $\square_1'$ und $A = (x,y) \in \square_1$ dreht sich zu $A' = (-y, x) \in \square_1'$.
2. Das gedrehte $\square_1'$ liegt links der y-Achse; mittels Addition der Breite 1 verschieben wir es auf die rechte Seite zu $\square_1''$ und aus $A' \in \square_1'$ wird $A'' = (-y+1, x) \in \square_1''$.
3. Strecken wir $\square_1''$ an 0 mit dem Faktor $1/q$, so erhalten wir gerade $\square_2 = \square_1'''$ und $A'' \in \square_1''$ geht über in $A''' = (1/q) \cdot (-y+1, x) \in \square_2$.

Die so definierte Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \frac{1}{q}(1-y, x)$ überführt nicht nur $\square_1$ in $\square_2$, sondern auch $\square_k$ in $\square_{k+1}$ für alle $k \geq 1$, d. h. es gilt:

$$\square_1 \supset \square_2 = F(\square_1) \supset \square_3 = F(\square_2) = F(F(\square_1)) \supset \ldots \supset \square_{k+1} = F(\square_k) = F^k(\square_1) \supset \ldots$$

Aus $\bigcap_{k \geq 1} \square_k = \{P\}$ folgt, dass der gesuchte Punkt P Fixpunkt der Abbildung F sein muss, d. h. es muss gelten $F(P) = P$.
Wir erhalten somit die Gleichungen

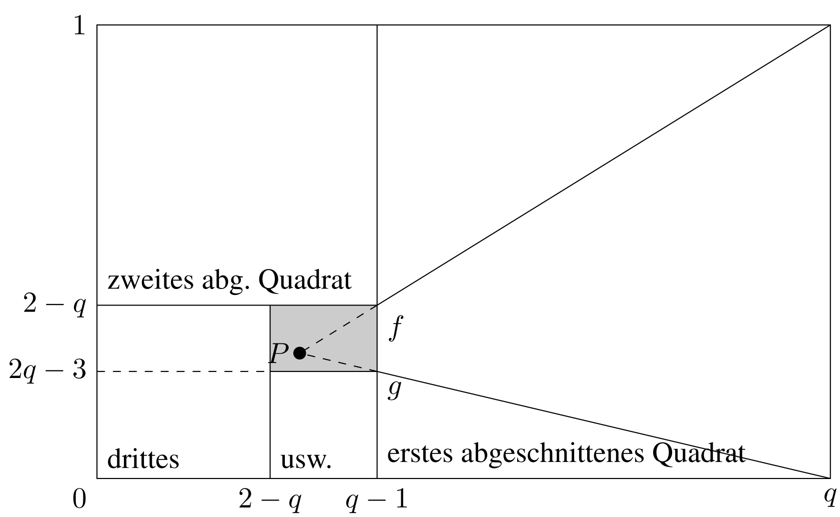
$$1 - y = qx, \quad x = qy.$$

Auflösen nach x und y liefert

$$P = (x,y) = \left(\frac{q}{1+q^2}, \frac{1}{1+q^2} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right).$$

Variante 2: Eine alternative Lösung benutzt, dass die Rechtecke $\square_1$ und $\square_5$ dieselbe Ausgangslage haben (bis auf Verschiebung und Skalierung). Das gilt dann sogar für alle Rechtecke $\square_{4k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$), und somit liegen alle deren obere linke Ecken auf einer Geraden (die entsprechenden Verbindungsstrecken von $\square_{4k+1}$ zu $\square_{4k+5}$ haben einen von k unabhängigen Anstieg).

Dazu tragen wir die Achsenabschnitte im Bild ein. Dasselbe gilt auch für die anderen drei Ecken und zwei dieser insgesamt vier Geraden genügen, um den gemeinsamen Schnittpunkt P zu bestimmen.



Man beginne also mit dem Rechteck $\square_1$, gegeben durch die Punkte $(0,0)$, $(0,1)$, $(q,1)$, $(q,0)$ und bestimme daraus die Ecken von $\square_5$ (grau): $(2-q, 2q-3)$, $(q-1, 2q-3)$, $(q-1, 2-q)$ und $(2-q, 2-q)$.
Nun bestimme man zwei der oben beschriebenen Geraden, z.B. f und g wie eingezeichnet:

$$f(x) = ax + b,\ f(q) = 1,\ f(q-1) = 2-q \rightsquigarrow f(x) = (q-1)x + 1 - (q-1)q$$

und

$$g(x) = cx + d,\ g(q) = 0,\ g(q-1) = 2q-3 \rightsquigarrow g(x) = (3-2q)x + (2q-3)q.$$

Durch Gleichsetzen der Geradengleichungen erhält man $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und Einsetzen in f (bzw. g) liefert $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Also hat der gesuchte Punkt P die Koordinaten

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right).$$

Aufgabe 3

Für eine im Dezimalsystem geschriebene n-stellige natürliche Zahl g bezeichnen wir mit $Q(g)$ ihre Quersumme. Beispiel: Für $g = 35296$ erhalten wir $Q(g) = 3+5+2+9+6 = 25$.

a) Man zeige, dass eine natürliche Zahl g und die Quersumme $Q(g)$ bei Teilen durch 9 denselben Rest haben. (2P)

b) Welchen Rest lassen die Zahlen $g = 2012^{2012}$ und $Q(g)$ beim Teilen durch 9? (2P)

c) Man berechne $Q^3(g) := Q(Q(Q(g)))$ für $g = 2012^{2012}$. (2P)

d) In welchen Jahren kann man die Aufgabe (c) in jeweils aktualisierter Form stellen und in welchen nicht? (4P)

Lösung

a) Für eine Zahl a sei $t_9(a)$ der Teilerrest von a beim Teilen durch 9. Die zentrale Erkenntnis hier ist, dass $t_9(10^k) = 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Daher gilt $t_9(a \cdot 10^k) = t_9(a)$ für $a \in \{0, \ldots, 9\}$. Weiter gilt $t_9(a+b) = t_9(t_9(a) + t_9(b))$. Man schreibe g im Dezimalsystem:

$$g = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i,\ a_i \in \{0, \ldots, 9\} \rightsquigarrow Q(g) = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

und nutze diese Darstellungen, um die Behauptung zu zeigen:

$$t_9(g) = t_9(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i) = t_9(\sum_{i=0}^{n} t_9(a_i 10^i)) = t_9(\sum_{i=0}^{n} t_9(a_i)) = t_9(\sum_{i=0}^{n} a_i) = t_9(Q(g)).$$

b) Man zeige zuerst für zwei natürliche Zahlen a und b:

$$t_9(a \cdot b) = t_9(t_9(a) \cdot t_9(b))$$

Nun nutze man die oben gewonnen Erkenntnisse:

$$t_9(2012^{2012}) = t_9(t_9(2012)^{2012}) = t_9(5^{2012}).$$

Außerdem gilt $t_9(5^6) = t_9(15625) = 1$. Dies nutze man aus, um $t_9(g) = t_9(Q(g)) = 7$ zu erhalten.

c) Nach a) gilt: $t_9(g) = t_9(Q(g))$, damit haben g und auch $Q^3(g)$ denselben Teilerrest beim Teilen durch 9.
Nach b) gilt: $t_9(g) = 7$.
Andererseits kann abgeschätzt werden $g < 10^{7000}$, also $Q(g) < 70.000$.
Daraus folgt $Q^2(g) \leq 6 + 9 + 9 + 9 + 9 = 42$ und somit $Q^3(g) \leq 12$.
Insgesamt ergibt das $Q^3(g) = 7$.

d) Die auftretenden Zahlen sollen die Form a^a haben. Daher lassen sie sich in drei Kategorien einteilen, nach dem Teilerrest von a beim Teilen durch 3. Für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt:

$$t_9((3k)^{3k}) = 0, \quad t_9((3k+1)^{3k+1}) = t_9(3k+1), \quad t_9((3k-1)^{3k-1}) = t_9(3k+1).$$

Um dies zu zeigen, verwende man, dass $t_9(a^6) = 1$ gilt, für alle Zahlen a mit $ggT(a, 9) = 1$. Offensichtlich gilt $ggT(3k \pm 1, 9) = 1$. Nun unterscheide man nach geradem und ungeradem k, außerdem nutze man noch das in (a) und (c) beobachtete Verhalten von t_9 bezüglich der Multiplikation. Zum Beispiel sei $k = 2n + 1$ ungerade:

$$\begin{aligned}
t_9((3k+1)^{3k+1}) &= t_9((3k+1)^{3(2n+1)+1}) \\
&= t_9((3k+1)^{6n+4}) \\
&= t_9((3k+1)^4) \\
&= t_9(3^4k^4 + 4 \cdot 3^3k^3 + 6 \cdot 3^2k^2 + 4 \cdot 3k + 1) \\
&= t_9(4 \cdot 3k + 1) \\
&= t_9(9k + 3k + 1) = t_9(3k + 1).
\end{aligned}$$

Die kritischen Reste, bei denen aus $Q^3(g) \leq 12$ noch nicht eindeutig auf $Q^3(g)$ geschlossen werden kann, sind 1, 2 und 3. Von diesen verbleibt also nur 1 als möglicher Rest einer Zahl der Form $g = a^a$ (hier kann zwischen 1 und 10 nicht unterschieden werden). Und $t_9(a^a) = 1$ passiert genau für $t_9(a) = \pm 1$.

Fragt man nach $Q^4(g)$, dann ist das Resultat immer eindeutig – nämlich $0, 1, 4, 0, 4, 7, 0, 7, 1$ in den Jahren mit den Neuner-Resten $0, 1, 2, \ldots, 8$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Bewegung eines Springers auf einem Schachbrett. Ein regulärer Zug des Springers versetzt diesen entweder ein Feld in horizontaler Richtung und zwei Felder in vertikaler Richtung oder zwei Felder in horizontaler Richtung und ein Feld in vertikaler Richtung.

a) Auf einem Standard-Schachbrett der Größe 8×8 mit 64 Feldern soll ein Springer vom Feld a1 (links unten) in 63 regulären Zügen zum Feld h8 (rechts oben) bewegt werden. Dabei soll er jedes andere Feld genau einmal betreten. Man zeige, dass dies nicht möglich ist. (3P)

b) Auf einem Alternativ-Schachbrett im Format 4×16 soll ein Springer nun mit 64 regulären Zügen in der Ecke a1 beginnend alle anderen Felder betreten und zu dieser Ecke zurückkehren. Man zeige, dass auch das unmöglich ist. (7P)

Lösung

a) Man benutze die Färbung des Schachbrettes:
Bei jedem Zug des Springers hat das Zielfeld eine andere Farbe als das Startfeld.
Bei 63 Zügen hat also auch das Zielfeld eine andere Farbe als das Startfeld. Diagonal gegenüber liegende Ecken haben aber dieselbe Farbe.

b) Man färbe die vier Längs-Reihen A-I-I-A („Außen“/„Innen“).
Nun kann ein Springer nie von A nach A ziehen.
Wenn wir das Start- und Rückkehrfeld mitzählen, gibt es ingesamt 65 Felder, davon 33-mal A und 32-mal I.
Jedes A-Feld bis auf das Startfeld braucht ein I-Feld als Vorgänger, möglich ist also nur die Folge

AIAI .... AI A (mit insgesamt 65 Feldern).

Nun betrachte man zusätzlich die natürliche SW-Färbung des Schachbrettes und nehme an, dass der Springer von einem schwarzen Feld gestartet ist. Da sich bei jedem Zug die Farbe ändert, sind folglich alle A-Felder schwarz und alle I-Felder weiß, das ist aber ein Widerspruch.