17. Berliner Tag der Mathematik 2012
Wettbewerb Stufe I: Klassen 7 und 8

Aufgabe 1

Zwei Extrem-Jogger verlassen bei Sonnenaufgang ihre jeweilige Heimatstadt und laufen mit jeweils konstanter Geschwindigkeit aufeinander zu. Um 12 Uhr mittags begegnen sie sich, wobei jeder Läufer mit gleichbleibender Geschwindigkeit in der bisherigen Richtung weiterläuft. Beide Jogger erreichen die Heimatstadt des jeweils anderen um 16 und um 21 Uhr. Wann war der Sonnenaufgang? (10P)

Lösung

Variante 1: Sei t die Zeit bis zum Treffen in M. Sei a die Geschwindigkeit des Joggers, der in Stadt A startet und Stadt B um 16 Uhr erreicht. Sei b die Geschwindigkeit des Joggers, der in B startet und um 21 Uhr in A ankommt.

Der erste Jogger benötigt t Stunden für die Strecke AM, während der zweite Jogger dieselbe Strecke in 9 Stunden schafft. Es ergibt sich $ta = 9b$. Analog argumentiert man $tb = 4a$ durch Betrachten der Strecke MB.

Multiplikation beider Gleichungen ergibt $t^2ab = 36ab$. Es folgt $t^2 = 36$, also $t = 6$. Folglich ging die Sonne um 6 Uhr auf.

Variante 2: Sei t immer noch die Zeit bis zum Treffen in M und seien a, b die Geschwindigkeiten der beiden Jogger.

Man beschreibe die Länge der Strecke AB auf drei Arten. Es gilt $|AB| = (a + b)t$, da beim Treffen im Punkt M beide Jogger zusammengefasst die Strecke AB gelaufen sind. Zudem gilt $|AB| = a(t + 4)$, da der erste Jogger für die Gesamtstrecke $t + 4$ Stunden benötigt. Analog gilt $|AB| = b(t + 9)$.
Also

$$a\,(t+4) = (a+b)\,t = b\,(t+9) \Rightarrow \frac{a}{b}\,(t+4) = \left(\frac{a}{b}+1\right)\,t = t+9.$$

Bezeichne $r := a/b$, dann folgt $r\,(t+4) = (r+1)\,t = t+9$. Die Gleichung $r\,(t+4) = (r+1)\,t$ liefert $t = 4r$. Die Gleichung $(r+1)\,t = t+9$ bringt $rt = 9$, also $4r^2 = 9$. Es folgt $r = 3/2$ und $t = 4r = 6$. Also ging die Sonne um 6 Uhr auf.

Aufgabe 2

In Deutschland wird auf die meisten Waren eine Mehrwertsteuer von 19% erhoben. So kostet z. B. eine Jeans statt der ursprünglich veranschlagten 50 € (dem sog. *Nettopreis*) im Laden $59,50$ €. Letzteren nennt man den *Bruttopreis*. Die zusätzlich eingenommenen $9,50$ € fließen in die Staatskasse und werden u. a. zur Förderung des Mathematikunterrichts eingesetzt.

Zwei Möbelgeschäfte A und B werben nun im Rahmen eines Sonntagsverkaufs damit, die Mehrwertsteuer nicht zu erheben. Da dies ungesetzlich ist, entscheiden sich beide für einen 19%-igen Rabatt auf alle Waren, wobei sie aber unterschiedlich vorgehen: Geschäft A gibt den Rabatt auf den Nettopreis und schlägt dann die Mehrwertsteuer auf. Geschäft B dagegen meint, das entspreche nicht der Erwartung der Kunden, und gibt deshalb den Rabatt auf den Bruttopreis, der bereits die gesetzliche Mehrwertsteuer enthält.

a) Angenommen, der Nettopreis eines Schrankes ist in Geschäft A und Geschäft B gleich. Um wieviel Prozent liegt der Endpreis beim Sonntagsverkauf in Geschäft B unter oder über dem, den Geschäft A verlangt? (3P)

b) Möbelgeschäft C sind all diese Rechnungen zu kompliziert. Deshalb verkauft es den gleichen Schrank zum Nettopreis, ohne die Mehrwertsteuer zu erheben. Um wieviel Prozent teurer oder billiger ist der gleiche Schrank in Geschäft A im Vergleich zu dem Schrank in Geschäft C? (3P)

c) Das Verhalten von Geschäft C ist zwar gesetzwidrig, stimmt aber genau mit dem Werbeversprechen überein. Wieviel Prozent Rabatt müßte Geschäft A geben, damit im Endpreis derselbe Effekt entsteht wie bei Geschäft C? (4P)

Lösung

a) Variante 1: Sei W der Wert des Schrankes, also der Nettopreis. Seien W_A und W_B jeweils der durch die Rabattaktion entstehende Preis in den Geschäften A und B. Von einem Preis 19% abzuziehen, bedeutet diesen mit 0.81 zu multiplizieren. Möchte man dagegen 19% zu einem Preis hinzufügen, multipliziert man ihn mit 1,19. Das heißt, $W_A = W \cdot 0.81 \cdot 1.19 = W_B$, da Multiplikation kommutativ ist.

Variante 2: Wieder sei W der Nettopreis des Schrankes. Von diesem zieht A zunächst 19% ab, und addiert zum Ergebnis 19%. Das heißt, im Geschäft A bezahlt man $W_A = W - \frac{19}{100}W + \frac{19}{100} \cdot \left(W - \frac{19}{100}W\right)$. Durch geschicktes Ausklammern erhält man die elegantere Form

$$\begin{aligned} W_A &= W - \frac{19}{100}W + \frac{19}{100} \cdot \left(W - \frac{19}{100}W\right) \\ &= W \cdot \left(1 - \frac{19}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{19}{100}\right) = W \cdot \left(1 - \frac{19^2}{100^2}\right). \end{aligned}$$

Dagegen addiert B zunächst 19% zu W und zieht von diesem Ergebnis 19% ab. Daher zahlt man in B

$$\begin{aligned} W_B &= W + \frac{19}{100}W - \frac{19}{100} \cdot \left(W + \frac{19}{100}W\right) \\ &= W \cdot \left(1 + \frac{19}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{19}{100}\right) = W \cdot \left(1 - \frac{19^2}{100^2}\right). \end{aligned}$$

Das heißt, sowohl im Geschäft A als auch im Geschäft B zahlt man den gleichen Preis.

b) Im Geschäft C zahlt man den Nettopreis W für den Schrank, während man in A den Preis $W_A = W \cdot 0.81 \cdot 1.19$ bezahlt. Im Laden A zahlt man also

$$\frac{W - W_A}{W} = 1 - 0.81 \cdot 1.19 = 0.0361 = 3,61\%$$

weniger als im Laden C. Mit Variante 2 aus (a) erhält man ebenso

$$\frac{W - W_A}{W} = 1 - \left(1 - \frac{19^2}{100^2}\right) = \frac{361}{10000} = 3,61\%.$$

c) Sei x der gesuchte Prozentsatz. Der Endpreis aus der Methode von Laden A soll dem Nettopreis entsprechen. Daher muss $W = W \cdot (1 - x) \cdot 1.19$ gelten.
Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich

$$x = 1 - \frac{1}{1.19} = \frac{119 - 100}{119} = \frac{19}{119} \approx 15.97\%.$$

Aufgabe 3

a) In der Ebene seien zwölf Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man immer vier Dreiecke mit diesen Punkten als Ecken finden, so dass die „gefüllten“ Dreiecke paarweise disjunkt zueinander sind, d. h. sich keine zwei der vier Dreiecksflächen überschneiden? (6P)

b) In der Situation von (a) habe sich jemand schon am Anfang ein Lieblingsdreieck ausgesucht, das keine anderen Punkte als seine drei Eckpunkte enthält. Kann man dann immer noch garantiert drei weitere Dreiecke mit den restlichen neun Punkten als Ecken finden, so dass, wie in (a), alle vier „gefüllten“ Dreiecke paarweise disjunkt zueinander sind? (4P)

Hinweis: Je nach Antwort soll die Lösung einen Beweis (einer allgemeingültigen Aussage) oder ein geeignetes Gegenbeispiel enthalten.

Lösung

a) Die Antwort ist „Ja“: Man wähle eine Gerade g, die zu keiner der Verbindungsgeraden P_iP_j parallel ist. Durch Verschieben der Geraden teilt man die Ebene in vier zueinander parallele Streifen, die jeweils drei Punkte enthalten. Diese drei Punkte verwende man jeweils zum Bilden eines Dreiecks.

b) Ein mögliches Gegenbeispiel ist folgendes: Man wähle ein „großes“ Dreieck ABC, legt nah an die Kante AB einen Punkt, und die verbleibenden 8 Punkte nah an die Kante AC.

Aufgabe 4

Eine genau und kontinuierlich (d.h. nicht sprunghaft) laufende Uhr zeigt 0 Uhr.

a) Wann werden das erste Mal danach wieder Stunden- und Minutenzeiger genau übereinander stehen? (3P)

b) Die Uhr hat auch noch einen Sekundenzeiger. Wann werden das erste Mal nach 0 Uhr alle drei Zeiger genau übereinander stehen? (4P)

c) Weil der schnelle Lauf des Sekundenzeigers den Konstrukteur zu sehr an das schnelle Verstreichen seiner Lebenszeit mahnte, beschloss er, sich selbst zu betrügen: Er verlangsamte diesen (aber nur diesen!) Zeiger auf ein Fünftel der Geschwindigkeit. Wenn der so manipulierte Sekundenzeiger einen ganzen Kreis abgelaufen war, so waren jetzt also bereits fünf Minuten vergangen. Wann stehen jetzt alle drei Zeiger nach 0 Uhr zum ersten Mal genau übereinander? (3P)

Lösung

Variante 1 (kurz)

a) Sei x die Stellung des Stundenzeigers zum gesuchten Zeitpunkt in 12 Stunden gemessen (d.h. 3 Stunden würden sich nach $x = 1/4$ übersetzen). Diese Zahl x entspricht also der Anzahl der Umdrehungen des Stundenzeigers.

Der Minutenzeiger ist 12 mal schneller als der Stundenzeiger. Also hat der Minutenzeiger zum gesuchten Zeitpunkt $12x$ Runden geschafft. Das Übereinanderstehen der Zeiger bedeutet nun, dass der Minutenzeiger eine ganze Anzahl von Runden plus die mit dem Stundenzeiger gemeinsamen x Runden geschafft hat. Dies übersetzt sich in die Bedingung $12x - x \in \mathbb{Z}$, also $11x \in \mathbb{Z}$. Die kleinste Lösung ist $x = 1/11$, d.h. es sind $12/11$ Stunden bzw. eine Stunde und $5,\overline{45}$ Minuten vergangen.

b) Sei x definiert wie in Teil (a). Dann haben wir wegen des Stunden- und Minutenzeigers erneut die Bedingung $11x \in \mathbb{Z}$.

Der Sekundenzeiger ist insgesamt 720 mal schneller als der Stundenzeiger. (Während der Stundenzeiger in 12 Stunden die Uhr einmal umkreist, dreht der Sekundenzeiger in jeder der $12 \cdot 60 = 720$ Minuten je eine Runde.) Damit ergibt sich mit derselben Begründung wie in (a), dass $720x - x \in \mathbb{Z}$ sein muss, also $719x \in \mathbb{Z}$.

Die Zahlen 11 und 719 sind teilerfremd. Also muss $x \in \mathbb{Z}$ gelten, damit die Bedingungen $11x, 719x \in \mathbb{Z}$ zugleich erfüllt sein können. Das heißt, der Stundenzeiger muss eine ganze Anzahl von Runden umkreisen, damit alle drei Zeiger die gleiche Lage haben. Die Lösung ist folglich 12 Uhr.

c) Im Unterschied zu (b) ist der Sekundenzeiger nur noch $720/5 = 144$ mal schneller als der Stundenzeiger. Dadurch wird die Bedingung $719\,x \in \mathbb{Z}$ durch $143\,x \in \mathbb{Z}$ ersetzt. Da 11 ein Teiler von 143 ist, ist diese Bedingung mit $11x \in \mathbb{Z}$ automatisch erfüllt. Wir erhalten also dieselbe Lösung wie in (a).

Variante 2 (ausführlich)

a) Sei x_{St} die Stellung des Stundenzeigers in 12 Stunden gemessen. Steht zum Beispiel die Uhr auf 3 Uhr, so ist $x_{St} = 3/12 = 1/4$, was bedeutet, dass der Stundenzeiger eine viertel Umdrehung geschafft hat. Weiterhin sei x_M die Stellung des Minutenzeigers in 60 Minuten gemessen. Lautet die Uhrzeit 5 Uhr 20, so ist $x_M = 20/60 = 1/3$. (Bemerkung: Die Stundenanzahl hat keinen Einfluss auf die Position des Minutenzeigers!)

Die gesuchte Zeit, bei der Stunden- und Minutenzeiger übereinander stehen ($x_{St} = x_M$), können wir in der Form

$$h \text{ Stunden und } m \text{ Minuten}$$

schreiben, wobei $h \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq h \leq 12$, $0 \leq m < 60$ gilt. Es ist dann

$$x_{St} = \frac{1}{12} \cdot \left(h + \frac{m}{60}\right), \; x_M = \frac{1}{60} \cdot m.$$

Die Gleichung $x_{St} = x_M$ liefert durch Umformen $h = 11m/60$. Die erste Uhrzeit nach 0 Uhr, bei der $x_{St} = x_M$ gilt, erhalten wir durch die Wahl $h = 1$, was $m = 60/11 = 5,\overline{45}$ liefert. Die Lösung lautet folglich, dass eine Stunde und $5,\overline{45}$ Minuten vergehen müssen.

b) Offenbar stehen alle drei Uhrzeiger übereinander, wenn die Uhr 12:00 anzeigt. Im folgenden wird gezeigt, dass es keinen früheren Zeitpunkt geben kann, an dem dieser Zustand vorliegt. Seien dazu x_{St} und x_M wie in (a) definiert. Weiterhin sei x_{Se} die Stellung des Sekundenzeigers in 60 Sekunden gemessen. Angenommen, es gäbe einen früheren Zeitpunkt, an dem alle Uhrzeiger übereinander stehen. Dann suchten wir nun den ersten Zeitpunkt nach 0 Uhr, bei dem $x_{St} = x_M = x_{Se}$ gilt. Dieser ließe sich in der Form

$$h \text{ Stunden, } m \text{ Minuten und } s \text{ Sekunden}$$

schreiben, wobei $h, m \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq h < 12$, $0 \leq m < 60$ und $0 \leq s < 60$ gilt. Es wäre dann

$$x_{St} = \frac{1}{12} \cdot \left(h + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}\right),$$

$$x_M = \frac{1}{60} \cdot \left(m + \frac{s}{60}\right), \; x_{Se} = \frac{1}{60} \cdot s.$$

Umformen der Gleichung $x_M = x_{Se}$ lieferte

$$s = \frac{60}{59} \cdot m.$$

Dies führte zusammen mit der Bedingung $x_{St} = x_{Se}$ zu

$$h = \frac{719}{3600} \cdot s - \frac{1}{60} \cdot m = \frac{11}{59} \cdot m.$$

Also $59h = 11m$. Da 59 und 11 teilerfremd sind, müßte 59 Teiler von m sein, was nur $m = 0$ oder $m = 59$ zuließe, da $m < 60$. Im ersten Fall erhielten wir die Uhrzeit 0:00. Im zweiten Fall ergäbe sich $h = 11$, $m = 59$ und $s = 60$, im Widerspruch zu $s < 60$. Also kann es keinen solchen früheren Zeitpunkt geben. Die Lösung lautet somit 12 Uhr.

c) x_{St} und x_M seien wie zuvor definiert. Im Unterschied zu Teil (b) beschreibe x_{Se} die Stellung des Sekundenzeigers in 300 Sekunden gemessen, so dass eine Umdrehung dieses Zeigers 5 Minuten entspricht. Nun suchen wir erneut den ersten Zeitpunkt, so dass $x_{St} = x_M = x_{Se}$ erfüllt ist, und schreiben diesen in der Form

h Stunden, m Minuten und s Sekunden,

wobei $h, m \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq h < 12$, $0 \leq m < 60$ und $0 \leq s < 60$ gilt. Dann gilt

$$x_{St} = \frac{1}{12} \cdot \left(h + \frac{m}{60} + \frac{s}{3600}\right),$$

$$x_M = \frac{1}{60} \cdot \left(m + \frac{s}{60}\right), \ x_{Se} = \frac{1}{300} \cdot s.$$

Die Gleichheit $x_M = x_{Se}$ liefert $s = \frac{60}{11} \cdot m$. Analog zu (b) führt dies zusammen mit der Bedingung $x_{St} = x_{Se}$ zu

$$h = \frac{12}{300} \cdot s - \frac{1}{3600} \cdot s - \frac{1}{60} \cdot m = \frac{1}{5} \cdot m.$$

Wie in (a) erhalten wir die erste Uhrzeit, indem wir $h = 1$ setzen. Damit folgt $m = 5$ sowie $s = 300/11 = 27,\overline{27}$. Also ist die Lösung

1 Stunde, 5 Minuten und $27,\overline{27}$ Sekunden.

Dies entspricht der Zeit des Aufgabenteils (a).