17. Berliner Tag der Mathematik 2012
Wettbewerb Stufe II: Klassen 9 und 10

Aufgabe 1

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass dann stets $\mathrm{ggT}(ab-1, a-1) = \mathrm{ggT}(a-1, b-1)$ gilt.
Hierbei bezeichnet $\mathrm{ggT}(A, B)$ den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen $A, B \in \mathbb{Z}$ (d. h. $g = \mathrm{ggT}(A, B) \geq 0$ ist ein gemeinsamer Teiler von A und B und jeder weitere gemeinsame Teiler von A und B teilt g). (10P)

Lösung

Für $t, A \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $t \mid A$, wenn t Teiler von A ist, d. h. wenn es $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $A = k \cdot t$.

Variante 1: Wir zeigen zunächst, dass der größte gemeinsame Teiler sich nicht ändert, wenn wir ein Vielfaches der einen Zahl zur anderen addieren, d. h. für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{ggT}(A, B) = \mathrm{ggT}(A, nA + B)$.

Sei dazu $t \mid A$ und $t \mid nA+B$. Dann kann man schreiben $A = k \cdot t$ und $nA+B = m \cdot t$, für passende $k, m \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $B = m \cdot t - nA = m \cdot t - n \cdot k \cdot t = (m - nk) \cdot t$, also $t \mid B$. Ein gemeinsamer Teiler t von A und $nA + B$ ist also immer auch gemeinsamer Teiler von A und B und damit ein Teiler von $g = \mathrm{ggT}(A, B)$. Ferner gilt, dass g gemeinsamer Teiler von $nA + B$ und A ist. Das zusammen liefert uns die gewünschte Aussage

$$g = \mathrm{ggT}(A, B) = \mathrm{ggT}(A, nA + B).$$

Wählen wir $n = B + 1$, erhalten wir als Sonderfall

$$g = \mathrm{ggT}(A, B) = \mathrm{ggT}(A, A + B + AB).$$

Kommen wir nun zurück zur Aufgabe. Wir setzen einfach $A := a - 1$ und $B := b - 1$.
Dann gilt $ab - 1 = (A + 1)(B + 1) - 1 = AB + A + B$. Das ergibt

$$\mathrm{ggT}(ab - 1, a - 1) = \mathrm{ggT}(AB + A + B, A) = \mathrm{ggT}(A, B) = \mathrm{ggT}(a - 1, b - 1)$$

und wir sind fertig.

Variante 2: Wir zeigen, dass jeder gemeinsame Teiler von $ab - 1, a - 1$ gemeinsamer Teiler von $a - 1, b - 1$ ist und umgekehrt. Dann stimmen auch die größten gemeinsamen Teiler überein.

Sei zunächst $t \mid a - 1$ und $t \mid b - 1$. Dann existieren $k, m \in \mathbb{Z}$ mit $a - 1 = kt$ und $b - 1 = mt$. Es folgt $ab - 1 = (kt + 1)(mt + 1) - 1 = (kmt + k + m) \cdot t$, also $t \mid ab - 1$.

Sei umgekehrt $t' \mid a - 1, t' \mid ab - 1$. Dann existieren $k', m' \in \mathbb{Z}$ mit $a - 1 = k't'$ und $ab - 1 = m't'$. Es folgt $ab - b = (a - 1)b = k't'b$ und daraus $b - 1 = ab - k't'b - 1 = m't' - k't'b = (m' - k'b) \cdot t'$, also $t' \mid b - 1$.

Aufgabe 2

a) Man zeige, dass es keine reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, für die gleichzeitig gilt: (3P)

$$x + y = 3/2 \text{ und } x^2 + y^2 = 1$$

b) Man zeige, dass für alle reellen Zahlen $x, y \in [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$1 + x \cdot x + y \cdot y \geq x + x \cdot y + y$$

erfüllt ist. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit? (3P)

c) Gibt es überhaupt reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung aus (b) verletzen? (4P)

Lösung

a) Variante 1: Aus $x + y = \frac{3}{2}$ folgt

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 9/4$$

Wegen $x^2 + y^2 = 1$ folgt $2xy = 5/4$. Also ist

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = -1/4,$$

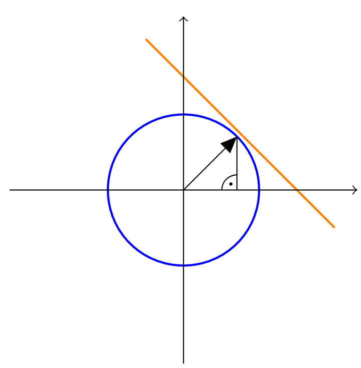
und das kann nicht sein.

Variante 2: Aus $x + y = \frac{3}{2}$ folgt $y = \frac{3}{2} - x$. Einsetzen in $x^2 + y^2 = 1$ liefert die quadratische Gleichung

$$x^2 + (\frac{3}{2} - x)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + \frac{5}{4} = 0.$$

Da die Diskriminante $9 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{5}{4} < 0$ ist, hat diese Gleichung keine reelle Lösung.

Variante 3: Die Menge aller Punkte (x, y) in der Ebene, die $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, bildet einen Kreis um den Ursprung mit Radius 1. Für $c \in \mathbb{R}$ liegen die Punkte (x, y) mit $x + y = c$ auf der Geraden $y = c - x$. Wenn c zunimmt, wird diese Gerade nach oben verschoben, wenn c abnimmt, nach unten.
Genau für $c = \sqrt{2}$ berührt die Gerade den Kreis im Punkt $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Für $0 \leq c < \sqrt{2}$ gibt es zwei Schnittpunkte, für $c > \sqrt{2}$ keinen Schnittpunkt.



Wegen $3/2 > \sqrt{2}$ gibt es somit keinen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, der zugleich auf der Geraden $x + y = \frac{3}{2}$ und dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ liegt.

b) Zu zeigen ist, dass $1 + x^2 + y^2 \geq x + xy + y$. Dies können wir umformen zu

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (1 - x - y + xy) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 + (1-x)(1-y) \geq 0.$$

Wenn $x \leq 1$ und $y \leq 1$, so wie vorausgesetzt war, dann sind beide Faktoren in $(1-x)(1-y)$ nicht negativ. Daher ist $(x-y)^2 + (1-x)(1-y) \geq 0$ immer erfüllt und Gleichheit gilt genau dann, wenn beide Summanden 0 sind, d. h. wenn $x = y = 1$.

c) Motiviert durch die Extremwerte $x = y = 1$ aus (b) substituieren wir $z := x - 1$ und $w := y - 1$. Dann ist die Frage, ob immer gilt:

$$(z-w)^2 + zw \geq 0$$

Das ist richtig und folgt aus

$$(z-w)^2 + zw = z^2 - zw + w^2 = (z - w/2)^2 + 3/4\, w^2 \geq 0.$$

Aufgabe 3

Welchen Flächeninhalt hat ein Dreieck mit den Seitenlängen (10P)

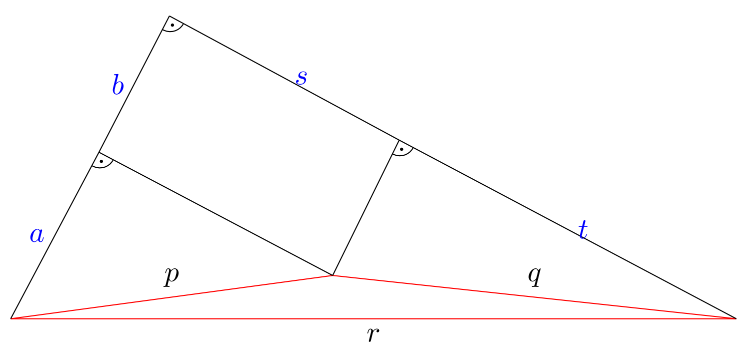
$$\sqrt{74}, \sqrt{116} \text{ und } \sqrt{370} \ ?$$

Lösung

Variante 1: Wenn man nur in den ganzen Zahlen rechnen möchte, kann man sich zunutze machen, dass

$$5^2 + 7^2 = 74, \quad 4^2 + 10^2 = 116, \quad (5+4)^2 + (7+10)^2 = 370.$$

Damit kann man rechtwinklige Dreiecke an die drei Seiten p, q, r anfügen, das sieht dann etwa so aus:



Dabei ist $a = 5$, $b = 4$, $s = 7$ und $t = 10$. Die drei rot-schwarzen Dreiecke sind nach dem Satz von Pythgoras rechtwinklig, denn

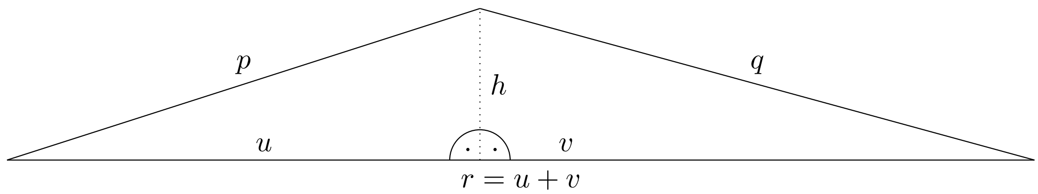
$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 + s^2 = 25 + 49 = 74, \\ q^2 &= b^2 + t^2 = 16 + 100 = 116, \\ r^2 &= (a+b)^2 + (s+t)^2 = 81 + 289 = 370. \end{aligned}$$

Deshalb ist auch das bei der Konstruktion der Dreiecke entstehende Viereck tatsächlich ein Rechteck.

Die Fläche des Gesamtdreiecks ist die Hälfte der Fläche des großen Rechtecks mit den Seiten der Länge $a + b$ und $s + t$. Für die gesuchte Fläche unseres roten Dreiecks müssen wir davon nur noch die Fläche $b \cdot s$ des kleinen Rechtecks sowie die Flächen $\frac{a \cdot s}{2}$ und $\frac{b \cdot t}{2}$ der kleinen Dreiecke abziehen. Also gilt:

$$A = (a+b) \cdot (s+t)/2 - b \cdot s - (a \cdot s)/2 - (b \cdot t)/2 = (9 \cdot 17)/2 - 28 - 35/2 - 20 = 11$$

Variante 2: Wir betrachten das Dreieck mit der noch unbekannten Höhe h.



Der Flächeninhalt ist dann $A = h \cdot r/2$, es muss also nur noch h berechnet werden.
Mit dem Satz von Pythagoras erhalten wir

$$h^2 + u^2 = p^2 = 74, \quad h^2 + v^2 = q^2 = 116.$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen, ergibt sich $v^2 - u^2 = 116 - 74 = 42$ und daraus $v^2 = u^2 + 42$.
Einsetzen in $r^2 = (u+v)^2 = 370$ liefert $u^2 + 2uv + (u^2 + 42) = 370$ und somit

$$v = \frac{328 - 2u^2}{2u} = \frac{164 - u^2}{u}.$$

Damit können wir nun u^2 explizit ausrechnen, denn $74 = u^2 + h^2 = u^2 + (116 - v^2) = u^2 + 116 - \left(\frac{164-u^2}{u}\right)^2$.
Durch Multiplizieren mit u^2 erhalten wir:

$$74\,u^2 = u^4 + 116\,u^2 - (164^2 - 2 \cdot 164\,u^2 + u^4) \;\Leftrightarrow\; 370\,u^2 = 164^2 \;\Leftrightarrow\; u^2 = \frac{13448}{185}$$

Damit ist dann

$$h^2 = 74 - u^2 = 74 - \frac{13448}{185} = \frac{242}{185}$$

und der Flächeninhalt ergibt sich zu

$$A = \frac{h \cdot r}{2} = \frac{\sqrt{h^2 r^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{242}{185} \cdot 370}}{2} = \frac{\sqrt{484}}{2} = 11.$$

Variante 3: Wir verwenden die Heronsche Formel. Danach gilt

$$A = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)}, \quad \text{mit } s = \frac{p+q+r}{2}.$$

Durch Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}{16}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2(p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2) - (p^4 + q^4 + r^4)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)^2 - 2(p^4 + q^4 + r^4)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(74 + 116 + 370)^2 - 2 \cdot (74^2 + 116^2 + 370^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{560^2 - 2 \cdot 155832} = \frac{1}{4}\sqrt{1936} = 11
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Seien n Punkte $P_1, \ldots, P_n$ in der Ebene gegeben, so dass alle Abstände $d(P_i, P_j)$ paarweise voneinander verschieden sind. Sei M die Menge aller Verbindungsstrecken $\overline{P_iP_j}$ von Punkten P_i ($i = 1, \ldots, n$) zu dem jeweils nächstgelegenen Punkt P_j ($j \neq i$). Man zeige, dass sich

a) aus Strecken in M niemals ein geschlossener Streckenzug $P_1, P_2, \ldots, P_k, P_1$ mit paarweise verschiedenen $P_1, \ldots, P_k$ ($k \geq 3$) zusammensetzen lässt und dass sich (5P)

b) keine zwei Strecken aus M in inneren Punkten schneiden. (5P)

Lösung

Falls P_j der dichteste Punkt an P_i ist, so bezeichnen wir P_i als Ausgangspunkt der so entstandenen Strecke $\overline{P_iP_j} \in M$. Die Länge dieser Strecke nennen wir $d_i = d(P_i, P_j)$. Da alle aufgenommenen Strecken so klein wie möglich sind, wissen wir $d_i = d(P_i, P_j) < d(P_i, P_k)$ für jeden Punkt $P_k \neq P_i, P_j$.

Sei also P_j der Punkt, der am nächsten zu P_i liegt (und die Entfernung d_i hat). Dann gibt es zwei Möglichkeiten: P_i ist auch der nächstgelegene Punkt für P_j oder es gibt einen anderen Punkt P_k, der noch näher an P_j liegt. Im ersten Fall gilt $d_i = d_j$, im zweiten Fall dagegen $d_i > d_j$. Die folgende Abbildung veranschaulicht die beiden Möglichkeiten.

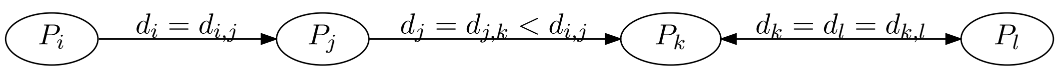


Abbildung 1: P_j ist der Punkt, der am nächsten an P_i ist. Jedoch ist P_i nicht der nächste Punkt zu P_j, da nämlich P_k noch näher liegt. Der nächste Punkt zu P_k ist schließlich P_l, für den es keinen Punkt gibt, der näher liegt als P_k.

a) In einem Streckenzug $\overline{P_iP_j}, \overline{P_jP_k} \in M$ aus drei paarweise verschiedenen Punkten P_i, P_j, P_k kann P_j nicht Ausgangspunkt für beide Strecken sein.

Daraus folgt, dass wir für einen geschlossenen M-Streckenzug entlang der Punkte $P_1, \ldots, P_k, P_1$ stets o.B.d.A. annehmen können, dass P_i und nicht P_{i+1} Ausgangspunkt von $\overline{P_iP_{i+1}} \in M$ ist. Damit gilt $d_i = d(P_i, P_{i+1}) > d_{i+1} = d(P_{i+1}, P_{i+2})$ für $1 \leq i \leq k-2$ und $d_{k-1} = d(P_{k-1}, P_k) > d_k = d(P_k, P_1) > d_1 = d(P_1, P_2)$. Kombinieren wir alle Ungleichungen erhalten wir $d_1 > d_2 > \ldots > d_{k-1} > d_k > d_1$, also $d_1 > d_1$, was einen Widerspruch darstellt.

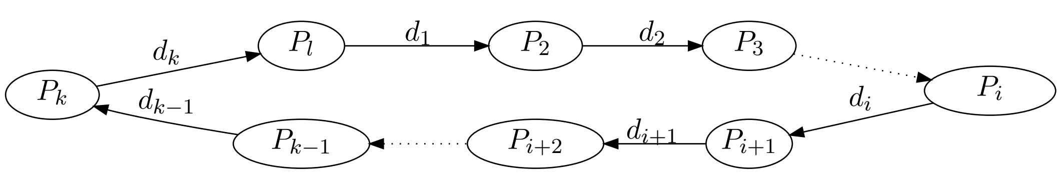


Abbildung 2: Wenn es einen geschlossenen Streckenzug gäbe, könnten wir ihn im Kreis folgen. Weil jeder Punkt mit seinem nächsten Nachbarn verbunden ist, würde das zu einer Kreisungleichung $d_1 > d_2 > \ldots > d_k > d_1$ führen, was nicht möglich ist.

b) Wir nehmen an, dass sich zwei Strecken $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_4}$ in einem inneren Punkt Q schneiden. Dann entsteht ein konvexes Viereck $\square(P_1P_2P_3P_4)$ mit diesen beiden Strecken als Diagonalen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass P_1 und P_2 Ausgangspunkte der jeweiligen Diagonalen sind, d. h.

$$d(P_1, P_3) < d(P_1, P_2), \;\; d(P_1, P_3) < d(P_1, P_4)$$

und

$$d(P_2, P_4) < d(P_1, P_2), \;\; d(P_2, P_4) < d(P_2, P_3).$$

Da in einem Dreieck die Summe zweier Seiten immer größer als die dritte Seite ist, gilt außerdem

$$d(P_2, Q) + d(Q, P_3) > d(P_2, P_3) \text{ und } d(P_1, Q) + d(Q, P_4) > d(P_1, P_4).$$

Summiert man diese Ungleichungen (und betrachtet so wieder die direkten Verbindungen $d(P_1, P_3), d(P_1, P_4)$ ohne Q), so folgt

$$d(P_1, P_3) + d(P_2, P_4) > d(P_2, P_3) + d(P_1, P_4),$$

im Widerspruch zu den ersten Ungleichungen.

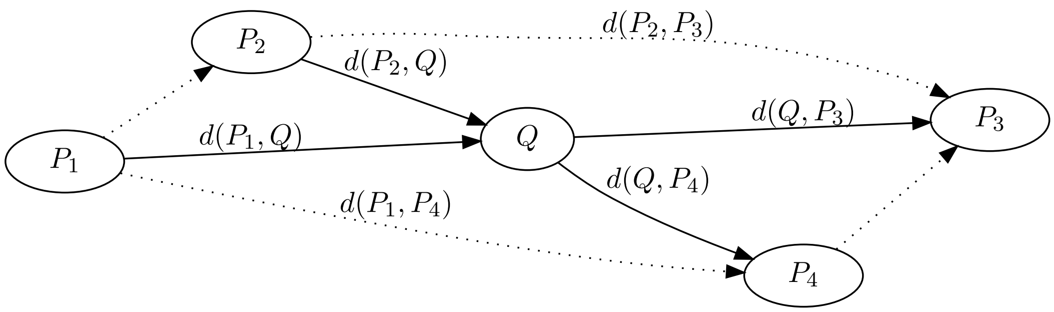


Abbildung 3: Wenn sich zwei Strecken in einem Punkt Q kreuzen, ergibt sich ein Widerspruch aus der Aussage, dass zwei Seiten eines Dreiecks in der Ebene zusammen immer länger sind als die dritte.