Tag der Mathematik 2016

Mathematischer Wettbewerb, Klassenstufe 7–8

30. April 2016, 9.00–12.00 Uhr

Aufgabe 1

(a) Auf wie vielen Nullen endet die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 10$?

(b) Auf wie vielen Nullen endet die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99 \cdot 100$?

(c) Auf wie vielen Nullen endet die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2015 \cdot 2016$?

Lösung. Wenn man das Produkt von ganzen Zahlen bildet, entsteht eine 0 am Ende, wenn es unter den Faktoren einmal den Primfaktor 5 und einmal den Primfaktor 2 gibt; es entstehen zwei Nullen, wenn es unter den Faktoren zweimal den Primfaktor 5 und zweimal den Primfaktor 2 gibt; usw. Allgemein gilt: Gibt es unter den Primfaktoren m-mal eine 5 und n-mal eine 2 und ist $m \leq n$, so endet das Produkt auf genau m Nullen.

Bei (a) haben wir zweimal den Primfaktor 5 (in der 5 und in der 10) und mehr als zweimal den Primfaktor 2. Also endet $1 \cdot 2 \cdots 10$ auf 2 Nullen. (Man könnte diese Zahl natürlich auch ausrechnen, um das zu sehen: $1 \cdot 2 \cdots 10 = 3\,628\,800$.)

Unter den Zahlen von 1 bis 100 ist jede zweite gerade, also ist die Anzahl n von oben mindestens 50. Jede fünfte Zahl ist durch 5 teilbar, also ist $m \geq 20$. Aber jede fünfte davon, nämlich 25, 50, 75 und 100, sind „zweimal durch 5 teilbar“, nämlich durch 25. Daher ist $m = 20 + 4 = 24$ (keine der Zahlen ist ja durch 125 teilbar), und $1 \cdot 2 \cdots 100$ endet auf genau 24 Nullen.

Bei 2016 ist $n \geq 1008$ wie oben. Jede fünfte Zahl ist durch 5 teilbar (das sind 403 Zahlen, da $2016 : 5 = 403$ Rest 1), jede fünfte davon nochmals durch 5, nämlich durch 25, teilbar (das sind 80 Zahlen, da $403 : 5 = 80$ Rest 3), jede fünfte davon nochmals durch 5, nämlich durch 125, teilbar (das sind 16 Zahlen, da $80 : 5 = 16$) und jede fünfte davon nochmals durch 5, nämlich durch 625, teilbar (das sind 3 Zahlen, da $16 : 5 = 3$ Rest 1). Insgesamt ist $m = 403 + 80 + 16 + 3 = 502$ $(\leq n)$, und das Produkt der Zahlen 1 bis 2016 endet auf genau 502 Nullen.

Aufgabe 2 Gegeben sind fünf verschiedene Zahlen, die in beliebiger Reihenfolge hintereinander geschrieben sind. Zeigt, dass man in dieser Liste zwei Zahlen so streichen kann, dass die drei Übriggebliebenen entweder immer größer werden oder immer kleiner werden.

Ein Beispiel dazu: In der Liste $\frac{9}{2}$, 10, 0, 4, 3 kann man $\frac{9}{2}$ und 0 streichen, und die Zahlen, die übrig bleiben (10, 4, 3), werden immer kleiner.

Lösung. Wir nennen das erste Element der Liste a_1, das zweite a_2 usw. (Im Beispiel ist also $a_1 = \frac{9}{2}$, $a_2 = 10$ usw.)

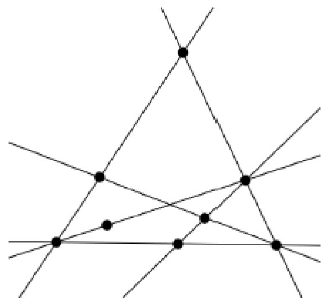
Wir betrachten die größte der 5 Zahlen und unterscheiden mehrere Fälle. Im ersten Fall nehmen wir an, dass diese an der ersten oder zweiten Stelle der Liste steht. Falls die letzten drei Zahlen immer größer werden, streichen wir a_1 und a_2 und erhalten eine wachsende Dreierliste. Falls nicht, ist $a_3 > a_4$ oder $a_3 > a_5$ oder $a_4 > a_5$. Zusammen mit der größten Zahl, die ja a_1 oder a_2 ist, erhalten wir eine fallende Dreierliste.

Wenn die größte der 5 Zahlen a_4 oder a_5 ist, argumentieren wir genauso – nur spiegelverkehrt.

Es bleibt der Fall, dass a_3 die größte Zahl ist. Dann betrachten wir die kleinste Zahl und nehmen zuerst an, dass sie an der ersten oder zweiten Stelle der Liste steht. Jetzt argumentieren wir analog zu oben: Falls die letzten drei Zahlen immer kleiner werden, streichen wir a_1 und a_2 und erhalten eine fallende Dreierliste. Falls nicht, ist $a_3 < a_4$ oder $a_3 < a_5$ oder $a_4 < a_5$; da jedoch a_3 die größte Zahl war, kommt nur $a_4 < a_5$ in Frage. Zusammen mit der kleinsten Zahl, die ja a_1 oder a_2 ist, erhalten wir eine wachsende Dreierliste. Und wenn die kleinste der 5 Zahlen a_4 oder a_5 ist, argumentieren wir wieder spiegelverkehrt.

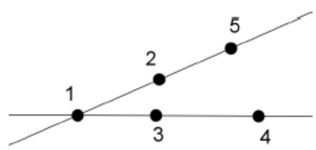
Damit sind alle Fälle erledigt.

Aufgabe 3 Die untenstehende Figur aus Geraden und Punkten in der Ebene (hier: 6 Geraden und 8 Punkte) hat die Eigenschaft, dass auf jeder Geraden genau 3 Punkte liegen. Man sagt, die Figur befinde sich „im Gleichgewicht".



(a) Konstruiert jeweils eine Figur im Gleichgewicht aus 7 Punkten und 5 Geraden bzw. aus 9 Punkten und 8 Geraden.

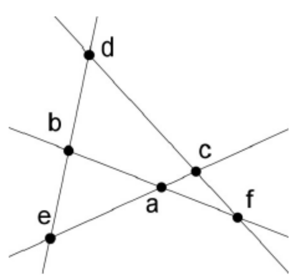
(b) Nun werden alle Punkte auf den Geraden durchnummeriert, d.h., für eine Figur im Gleichgewicht mit N Punkten werden die Nummern $1, \dots, N$ vergeben. Eine Nummerierung, bei der die Summe auf jeder Geraden gleich einer Zahl K ist, wird „magisch" genannt. Gegeben ist eine Figur mit 2 Geraden und 5 Punkten und einer magischen Nummerierung für $K = 8$.



$K = 8$

Findet eine weitere magische Nummerierung für ein $K \neq 8$ und zeigt, dass für jede magische Nummerierung der Schnittpunkt der beiden Geraden eine der Nummern $1, 3$ oder 5 haben muss.

(c) Die nächste Gleichgewichtsfigur aus 6 Punkten und 4 Geraden ist auf eine bestimmte Art nummeriert, wobei die Buchstaben für die Nummern $1, 2, \dots, 6$ stehen (die Zuordnung ist jedoch nicht bekannt).



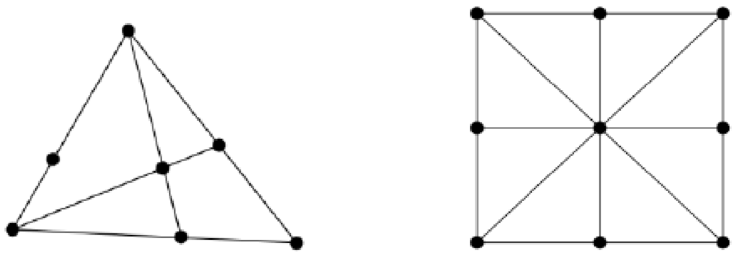
Zeigt, dass die Gleichung

$$4K = 42$$

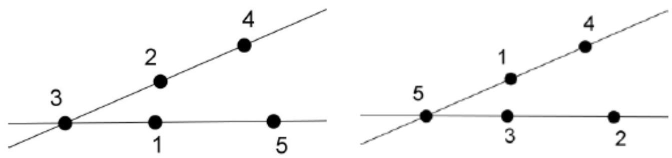
gilt, wenn die Nummerierung magisch mit der Konstante K ist.

Gibt es eine magische Nummerierung? Begründet Eure Antwort, indem Ihr ein Beispiel bzw. ein Gegenargument angebt.

Lösung. (a) Der Lösungsweg besteht im systematischen Herumprobieren. Die nachstehende Abbildung zeigt Beispiele von Gleichgewichtsfiguren mit 7 Punkten und 5 Geraden bzw. mit 9 Punkten und 8 Geraden.



(b) Die folgende Abbildung zeigt magische Nummerierungen für $K = 9$ und $K = 10$.



Um zu zeigen, dass für die Schnittpunkte nur die Zahlen 1, 3 oder 5 infrage kommen, muss man zeigen, dass es für 2 oder 4 keine magische Nummerierungen geben kann. Das macht man am besten, indem man die Möglichkeiten durchgeht: Hat der Schnittpunkt die 2, bleiben für die Geraden die Zahlenkombinationen $\{\{1,3\},\{4,5\}\}$, $\{\{1,4\},\{3,5\}\}$ und $\{\{1,5\},\{3,4\}\}$ übrig, die allesamt nicht magisch sind. Für den Schnittpunkt 4 argumentiert man analog.

(c) Die Summen auf den 4 Geraden sind

$$\begin{gathered} e+b+d \\ e+a+c \\ b+a+f \\ d+c+f \end{gathered}$$

Alle Teilsummen zusammenaddiert ergeben unter der Voraussetzung, dass die Nummerierung magisch mit der Konstanten K ist, gerade $4K$. Die Zahlen 1 bis 6 ergeben zusammenaddiert 21; da aber jeder Punkt Schnittpunkt von 2 Geraden ist, müssen wir die Summe verdoppeln, sprich:

$$2(1+2+3+4+5+6) = 42\,.$$

Folglich muss für jede hypothetische magische Nummerierung $4K = 42$ gelten. Daraus folgt allerdings sofort, dass es keine magische Nummerierung geben kann, denn umgestellt ergibt die Gleichung $K = 10{,}5$, und das ist keine ganze Zahl.

Aufgabe 4 Der kleine Noah versucht verzweifelt, an den 4-stelligen PIN-Code des Telefons seiner großen Schwester Maria heranzukommen. Alles, was sie ihm verrät, ist, dass keine der Ziffern 0 ist, dass sie allesamt verschieden sind und dass die Summe aller Zahlen, die aus jeweils zwei der vier Ziffern gebildet werden können, mit 7 multipliziert den Code ergibt. (Wäre der Code 1234, müsste also die Summe $12 + 21 + 13 + 31 + \ldots$ gebildet werden.) Wie lautet Marias PIN-Code?

Lösung. Wir bezeichnen mit $C = \underline{abcd}$ den gesuchten Code, wobei die Ziffern $a, b, c, d \neq 0$ paarweise verschieden sind. Die Summe aller möglichen Zweierkombinationen von Ziffern ist

$$\begin{aligned} S &= \underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ad} + \underline{ba} + \underline{bc} + \underline{bd} + \underline{ca} + \underline{cb} + \underline{cd} + \underline{da} + \underline{db} + \underline{dc} \\ &= 10a + b + 10a + c + 10a + d + \ldots + 10d + a + 10d + b + 10d + c \\ &= 33(a + b + c + d) \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung gilt $C = 7S$. Nun setze $Q = a + b + c + d$, die Quersumme des Codes. Dann ist

$$C = 7 \cdot 33 \cdot Q = 231 \cdot Q\,.$$

Da die rechte Seite durch 3 teilbar ist, ist C ein Vielfaches von 3, folglich auch die Quersumme Q von C. (Zur Erinnerung: Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn es ihre Quersumme ist, und umgekehrt!) Wir setzen $Q = 3q$, woraus

$$C = 7 \cdot 33 \cdot 3 \cdot q = 77 \cdot 9 \cdot q$$

folgt. Somit ist C auch Vielfaches von 9, und das gilt gleichermaßen für die Quersumme Q. (Zur Erinnerung: Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn es ihre Quersumme ist, und umgekehrt!)

Die kleinstmögliche Quersumme, die aus den 4 Codeziffern gebildet werden kann, ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ und die größtmögliche $9 + 8 + 7 + 6 = 30$. Also ist $10 \leq Q \leq 30$.

Nun sind die beiden einzigen durch 9 teilbaren Zahlen zwischen 10 und 30 die Zahlen $Q = 18$ und $Q = 27$. Davon scheidet die zweite Möglichkeit aus, denn

$$231 \cdot 27 = 6237, \text{ aber } 6 + 2 + 3 + 7 \neq 27\,.$$

Für $Q = 18$ hingegen erhalten wir

$$231 \cdot 18 = 4158, \text{ wobei } 4 + 1 + 5 + 8 = 18\,.$$

Marias PIN-Code lautet somit 4158.