Was sind Zahlen?

Intuition vs. Axiomatik in der Mathematik

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

25. Tag der Mathematik
30. April 2022, Freie Universität Berlin

Drei Quellen für diesen Vortrag

- Anwendung der Mathematik
  Typisch: Ein Modell funktioniert nicht in der Praxis. Was tun?
- Historische Entwicklung der Mathematik
  Viele Probleme sind bereits vor tausenden von Jahren aufgetreten, wurden wegdiskutiert, verschwanden dadurch aber nicht.
- Die Entwicklung des Zahlgefühls bei Kindern
  - Kinder nähern sich der Mathematik intuitiv.
  - Kinder “wiederholen” die historische Entwicklung.
  - Kinder haben (häufig) Problemen beim axiomatischen Verständnis.

Theorie und Praxis

- Theorie und Praxis passen nicht zusammen
  - Theorie: Strebt nach Vereinheitlichung (Identifizierung, Vereinigung).
  - Praxis: Erfordert Differenzierung.
- Theorie und Praxis leben in verschiedenen Welten
  - Praxis: Lebt in Raum und Zeit.
  - Theorie: Lebt außerhalb von Raum und Zeit.
- Was tun?
- Wo paßt die Theorie nicht zur Realität?
- Hegel: "Wenn die Tatsachen nicht mit der Theorie übereinstimmen – umso schlimmer für die Tatsachen."

Georg Wilhelm Friedrich Hegel

Zur Geschichte: Spengler über Zahlen

Die Rolle der Zahlen hat sich
im Laufe der Zeit geändert.

Oswald Spengler
Der Untergang des Abendlandes 1918 – 1922

- Griechische Mathematik: Zahlen als Größen (Verhältnisse)
- Arabisch-indische Mathematik: Zahlen als Symbole (Variable)
- Neuzeitliche Mathematik: Zahlen als Funktion (Kontinuum)

Die alten Griechen

- Es gab verschiedene Zahlen
  - Es gab Größen: Anzahlen, Längen, Flächen
  - Es gab Verhältnisse (Quotienten von Größen)
- 1 war keine Zahl
- 0 gab es nicht
- Keine Variablen. Aufgaben hatten konkrete Lösungen.
- Zenons Pardoxa:
  - Pardoxon von Achilles und der Schildkröte
  - Pfeil-Paradoxon (der fliegende Pfeil ruht)

  (Zenon von Elea, um 490 v. Chr. bis um 430 v. Chr.)
- Existenz irrationaler Verhältnisse
  Erste Grundlagenkrise der Mathematik

Die Neuzeit. Benutzung von Zahlen

- Komplexe Zahlen seit 1545 (Gerolamo Cardano)
  Gaußsche Zahlenebene (1831)
- Rechtwinkliges (kartesisches) Koordinatensystem.
  Analytische Geometrie. (Punkte sind Zahlen)
  - Pierre de Fermat (1607 – 1665)
  - René Descartes (1596 – 1650)
  - Wilhelm Leibniz (1676) (x, y) als *Abszisse* und *Ordinate*
    (im Brief an Henry Oldenburg erwähnt)
- Infinitesimalrechnung. Analytische Mechanik
  (Bewegung sind Zahlen, Bewegung läßt sich berechnen)
  - Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)
  - Isaac Newton (1643 – 1727)
  - Joseph-Louis Lagrange (analytische Mechanik 1788)

Das Jahr der Zahlen. Axiomatik des Zahlbegriffs

- 2. Hälfte des 19.Jh. Ziel: Axiomatik des Zahlbegriffs
- 1887 "das Jahr der Zahlen"
  - Hermann von Helmholtz. Zählen und Messen. (Zahlen = physikalische Größen)
  - Richard Dedekind. Was sind Zahlen. (Dedekindscher Schnitt, ε, δ-Begriffe)
  - Edmund Husserl. Über den Begriff der Zahl.
  - Leopold Kronecker. Über den Zahlbegriff.
- 1889 natürliche Zahlen (Peanoschen Axiome)
  Jede Zahl hat einen Nachfolger. Vollständige Induktion.

Kardinal- und Ordinalzahlen

- Natürliche Zahlen können Kardinal- und/oder Ordinalzahlen sein.
- Kardinalzahlen = Anzahl der Elemente einer Menge
  sehr intuitiv, Addition = Mengenvereinigung
- Ordinalzahlen = Nummerierung, Indizes der Elemente einer Folge
  Zum Rechnen intuitiv ungeeignet
- Theorie: Ordinalzahlen werden definiert
  Rechenoperationen werden für Ordinalzahlen definiert
- Kardinalzahlen = Ordinalzahlen per Definition spezieller Mengen

Zahlen und Zählen

- Zählen benutzt die Identität von Kardinal- und Ordinalzahlen.
- Dualität von Gleichem und Verschiedenem:
  - Damit ich zwei Objekte als gleich erkenne müssen sie verschieden sein. (Es gibt keine Eins).
  - Damit ich zwei Objekte als verschieden erkenne müssen sie gleich sein. (in gewissem Sinne)
- Zählen hängt nicht von der Reihenfolge ab. D.h., der Ordinalzahl-Aspekt muß künstlich festgelegt werden.
- Kinder
  - Können früh zählen (haben die Ordinalzahlen gelernt)
  - Können aber nicht abzählen. (KardinalZ $\neq$ OrdinalZ)
  - Benutzen das Abzählen aus eigenem Antrieb sehr spät.
  - Können “vorwärts” nicht bis 1 zählen, nur rückwärts.
  - Es gibt verschiedene Nullen, leere Mengen.

Zählen. Raum und Zeit

- Menge (KardinalZ) lebt im Raum.
  Zählen (OrdinalZ) lebt in der Zeit.
- Oswald Spengler: ... *Aber Zählen ist keine Zahl, so wenig als Zeichnen eine Zeichnung ist. Zählen und Zeichnen sind ein Werden, Zahlen und Figuren sind Gewordenes.*

$\Longrightarrow$ Identifizierung von Kardinal- und Ordinalzahlen ist "gewagt". Bedeutet Identifizierung von Raum und Zeit.

Paradoxa mit natürlichen Zahlen

- Beim 100m-Lauf war Paul 2. und Fritz 5.
  Was ist $5 + 2$? Was ist $5 - 2$?
- Papa hat ein Auto mit 7 Sitzen, Opa eins mit 5 Sitzen.
  $5 + 7 = 12$ ist eine sinnvolle Aufgabe.
- Wir hatten früher ein Auto mit 5 Sitzen. Das haben wir verschrottet und uns ein neues mit 7 Sitzen gekauft.
  $5 + 7$ ist keine sinnvolle Aufgabe.
  $7 - 5$ ist eine sinnvolle Aufgabe.
- Auf einem Bauernhof haben die Hühner gestern 12 Eier und heute 15 Eier gelegt.
  $12 + 15$ ist eine sinnvolle Aufgabe, obwohl es Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten sind.

Zusammenfassung. Natürliche Zahlen

- Ordinalzahlen darf man nicht addieren.
- Ordinalzahlen darf man subtrahieren.
  Differenz ist eine Kardinalzahl.
- Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten, die in einem Kausalverhältnis stehen, darf man nicht addieren aber subtrahieren.
- Zeitpunkte kann man sich nebeneinander im Raum vorstellen, wenn sie in keinem Kausalverhältnis stehen.
- Tage werden “räumlich” gezählt.
- Genauso wird “Bewegung” in der Mathematik beschrieben.
- Mathematik (im Gegensatz zur physischen Realität)
  lebt außerhalb von Raum und Zeit.

Zusammenfassung. Vorsicht bei ...

- Identifizierung/Vereinigung
  (insb. von Kardinal- und Ordnialzahlen)
- Interpretation von Raum und Zeit

Das paßt nicht zum Zeitgeist!

An der vordersten Front der Wissenschaft

Der Weg zu den reellen Zahlen

- $\mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{Z} \Longrightarrow \mathbb{Q}$ ... alles klar, Lösbarkeit von Gleichungen
- Warum reelle Zahlen? Weil $\sqrt{2}$ nicht rational ist?
- Es reichen algebraische Zahlen und e und π, ...
  (Algebraische Zahlen sind Lösungen von Gleichungen der Form $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten.)
- Das sind alles abzählbar viele Zahlen!
- Warum also reelle Zahlen?
  Für das Kontinuum (Geometrie oder Mechanik).

Dedekind. Was sind Zahlen. (1887)

Will man nun, was doch der Wunsch ist, alle Erscheinungen in der Geraden auch arithmetisch verfolgen, so reichen dazu die rationalen Zahlen nicht aus, und es wird daher unumgänglich notwendig, das Instrument $\mathbb{Q}$*, welches durch die Schöpfung der rationalen Zahlen konstruiert war, wesentlich zu verfeinern durch eine Schöpfung von neuen Zahlen der Art, daß das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe Stetigkeit gewinnt, wie die gerade Linie.*

$\Longrightarrow$ Es geht um die Identifizierung von Punkten und Zahlen!
Punkte sind kontinuierlich, Zahlen sind diskret.

"... was doch der Wunsch ist ..."

Paradoxa mit reellen Zahlen

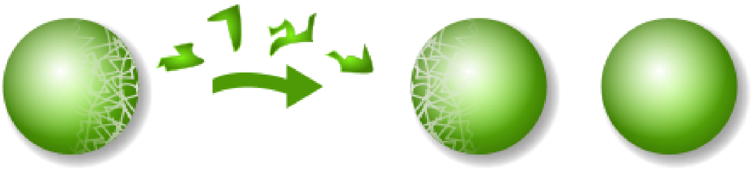
- Gleichheit oder Ungleichheit von reellen Zahlen
  $x = \sqrt{2} - 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$ Frage $x = y$?
  $x = 0,41421\ldots$
  $y = 0,41421\ldots$

$\Longrightarrow$ Ungleichheit feststellbar, Gleichheit im allgemeinen nicht.

- Wahrscheinlichkeit der Punkte auf einer Kugel ist 0.
  Trotzdem bleibt die Kugel irgendwo liegen!
- **Theorem:** Wenn die Summe einer Menge positiver Zahlen endlich ist, können es nur abzählbar viele Zahlen sein.

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Kugel kann in endlich viele Teile zerlegt werden, aus denen sich zwei Kugeln jeweils von der Größe des Originals zusammensetzen lassen (Beweis mit Auswahlaxiom).

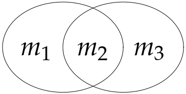


Dieses Paradoxon demonstriert:

- Eine Kugel ist keine "Punktmenge".
- Mathematisches Volumen $\neq$ intuitives Volumen

Helmholtz. Zählen und Messen (1887)

- Helmholtz: Reelle Zahlen sind Meßergebnisse.
  Ein Meßinstrument ist ein Gerät, das "unendlich" exakt ist.
- Wir vergleichen mit einer Balkenwaage die Massen dreier Kugeln m_1, m_2 und m_3.
- Ergebnis: $m_1 = m_2$, $m_2 = m_3$. Folgt daraus $m_1 = m_3$?
- Nicht unbedingt: Bei Meßgenauigkeit von 0.5g: $m_1 \neq m_3$
  $m_1 = 5.1g,\ m_2 = 5.5g,\ m_3 = 5.9g$.
- Besser: Interpretation von Meßergebnissen
  als "Enthaltensein in offenen Mengen". $\Longrightarrow$ Topologie.



$$m_1 = m_2,\ m_2 = m_3 \not\Longrightarrow\ m_1 = m_3$$

Zahlen als physikalische Größen

- Es gibt in der Physik verschiedene Größen
  - *extensive* Masse, Volumen, (Kardinalzahlen)
  - *intensive* Temperatur, Geschwindigkeit, (Ordinalzahlen)
- Im Zimmer sind 20°C, draußen sind 4°C. (20+4 ist Unsinn)
- Geschwindigkeiten: Wir fahren 2 Stunden mit 60 km/h und 3 Stunden mit 100 km/h.
  Kann man (diese) Geschwindigkeiten addieren?
- Die Null hat keine Einheit.
  Die Spannung zwischen zwei Punkten ist 0.
  (oder 0 V, oder 0 kg ?)
- Was ist eine leere Menge?
  Ist ein leeres Zimmer dasselbe wie ein leerer Kartoffelsack?
  In der Mathematik gibt nur eine leere Menge!

Zusammenfassung
Was wird durch die Axiomatik nicht berücksichtigt

- Dualität von Kontinuum und Diskretheit.
  - Zahlen betrachten wir isoliert, konkret, diskret.
  - Ein Kontinuum betrachten wir als geometrisches Objekt oder als Bewegung.
- Dualität von Raum-Zeit und Raum-Zeit-losigkeit.
- Dualität von Gleichheit und Verschiedenheit.
- Identifizierung von Objekten ist nicht intuitiv.
  In der Natur gibt es keine “identischen” oder “nichtunterscheidbaren” Objekte.
  Alle realen Objekte sind Unikate.
  Wir fassen sie geeignet zusammen.

Tips für den Matheunterricht (mehr Intuition)

- Unterschiede zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen erhalten.
  Zieht sich wie ein roter Faden durch die ganze Mathematik.
- Zahlenbereichserweiterungen
  - Natürliche Zahlen $\Longrightarrow$ Dezimalbrüche als Kardinalzahlen.
  - Natürliche Zahlen $\Longrightarrow$ negative Zahlen als Kardinalzahlen.
  - Natürliche Zahlen $\Longrightarrow$ gebrochene Zahlen als Ordinalzahlen.
  - Keine Dedekindschen Schnitte.
    Besser intuitive Intervallschachtelung
    als Übergang zu unendlichen Dezimalbrüchen.
  - Stetigkeit topologisch definieren, kein ε, δ–Zeugs.

  Addition als Mittelung intensiver Größen.
- Gemeine Brüche und Dezimalbrüche unterscheiden.

Ausbildung am WIAS

- Beobachtung (empirische Feststellung):
  Nicht jeder Schüler, der gut in Mathe ist, will studieren.
- Das WIAS bildet Lehrlinge (Azubis) zum

  Mathematisch-technischen Softwareentwickler (MATSE)

  aus.
- Dreijährige duale Ausbildung:
  1 Woche Berufsschule, 2 Wochen Arbeit am WIAS
- Im Herbst beginnt die Bewerbungsphase für den neuen Ausbildungszyklus 2023-2026.
- Betrifft Schüler, die jetzt in der 11. Klasse sind.