Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

Modul: Wissenschaftliches Arbeiten in der Mathematik (0084dB1.1P)
Proseminar zur Diskreten Mathematik I
Leitung: Prof. Dr. Ralf Borndörfer; Dr. Niels Lindner
Semester: Wintersemester 2021/2022

Das Lemma von Burnside

Name: Sebastian Szymanek
Matrikelnummer: 5274533
E-Mailadresse: sebastian.szymanek@fu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einordnung

Das Lemma von Burnside ist ein Resultat, dass der Kombinatorik zugeordnet werden kann, weil es das Zählen von "komplizierten" Objekten erleichtert. Um exakt zu sein: mit "komplizierten" Objekten sind Äquivalenzklassen[1] gemeint, die wir nicht unbedingt genau kennen.
Der Abzählsatz von Pólya ist eine Verallgemeinerung vom Lemma von Burnside. Darum kann er auch auf die Beispiele in diesem Dokument angewendet werden.

1.2 Notation

Es seien X eine Menge, $(G, *)$ eine Gruppe und G wirke auf X. Für jedes Element x_0 aus X sei $G(x_0)$, der Orbit von x_0, eine Teilmenge von X, die für alle Elemente g aus G das Bild von x_0 unter g enthält.

$$G(x_0) = \{g(x_0)|g \in G\}$$

Der Stabilisator von x_0 wird mit G_{x_0} bezeichnet und ist eine Teilmenge von G, die alle Elemente g enthält, welche x_0 auf sich selbst abbilden.

$$G_{x_0} = \{g \in G|g(x_0) = x_0\}$$

Für jedes Element g_0 aus G sei X_{g_0}, die Fixmenge von g_0, eine Teilmenge von X, die alle Elemente x enthält, welche von g_0 auf sich selbst abgebildet werden.

$$X_{g_0} = \{x \in X|g_0(x) = x\}$$

[1] Ein Beweis dafür, dass es sich wirklich um Äquivalenzklassen handelt, befindet sich im Anhang unter der Überschrift Zerlegung von X

2 Orbit-Stabilisator-Satz

Es seien $(G, *)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt für jedes beliebige Element x aus X:

$$|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$$

2.1 Beweis

Es sei x aus X beliebig. Um die obige Gleichheit zu zeigen definieren wir eine Hilfsmenge: $S = \{(g, y) \in G \times X | y = g(x)\}$. Die Mächtigkeit von S ist gleich der Mächtigkeit von G, weil für alle Elemente g aus G das Tupel $(g, g(x))$ in S liegt. Wenn y in $X \setminus G(x)$ liegt, dann gilt für alle g in G: $g(y) \notin G(x)$ insbesondere $g(y) \neq x$. Sei y ein Element aus $G(x)$. Das bedeutet es existiert ein g in G, sodass $g(x) = y$ ist. Sei dieses Element g nun fest. Dann kann für alle g_0 aus G_x folgendes beobachtet werden:

$$(g * g_0)(x) = g(g_0(x)) = g(x) = y$$

Somit gibt es für jedes Element in $G(x)$ genau $|G_x|$ Tupel in S. Es gilt also:

$$|G| = |S| = \sum_{y \in G(x)} |G_x| = |G(x)| \cdot |G_x|$$

$\square$

2.2 Bemerkung

Elemente aus dem gleichen Orbit, haben den gleichen Orbit. Formal seien x aus X und y aus $G(x)$. Dann gilt:

$$G(x) = G(y)$$

Um das kurz zu begründen, sei z ein beliebiges Element in X und $g_0(x) = y$.

$$\begin{aligned}
& z \in G(x) \\
\Longrightarrow\ & \exists g \in G\colon z = g(x) \\
\Longrightarrow\ & \exists g^{-1} \in G\colon g^{-1}(z) = x \\
\Longrightarrow\ & \exists g^{-1} \in G\colon g_0(g^{-1}(z)) = y \\
\Longrightarrow\ & z \in G(y)
\end{aligned}$$

Analog dazu kann man mit g_0^{-1} schließen, dass z in $G(x)$ liegt, wenn es in $G(y)$ liegt.

2.3 Folgerung

Die Stabilisatoren von Elementen aus dem gleichen Orbit, sind gleich groß. Es seinen wieder x aus X und y aus $G(x)$. Dann gilt:

$$|G_x| = |G_y|$$

Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass $G(x)$ gleich $G(y)$ ist. Insbesondere sind die beiden Orbits gleich groß. Den Rest trägt der Orbit-Stabilisator-Satz bei:

$$\begin{aligned} & |G(x)| \cdot |G_x| = |G| = |G(y)| \cdot |G_y| \\ \Longrightarrow\ & |G(x)| \cdot |G_x| = |G(x)| \cdot |G_y| \\ \Longrightarrow\ & |G_x| = |G_y| \end{aligned}$$

3 Fixmengen und Stabilisatoren Satz

Es seien $(G, *)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt:

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

3.1 Beweis

Wir betrachten erneut eine Hilfsmenge. Sie soll den Zusammenhang von fixierten Elementen und stabilisierenden Elementen ganz genau darstellen: $T = \{(g, x) \in G \times X | g(x) = x\}$.
Für jedes Element g aus G liegt (g, x) genau dann in T, wenn x in X_g ist.
Für jedes Element x aus X liegt (g, x) genau dann in T, wenn g in G_x ist.
Daraus folgt:

$$\sum_{g \in G} |X_g| = |T| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

$\square$

4 Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

4.1 Beweis

Die Aussage kann relativ einfach nachgerechnet werden, weil alle interessanten Umformungen in die Abschnitte 2, 2.3 und 3 ausgelagert wurden.

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}|X_g| \overset{3.}{=} \sum_{x\in X}|G_x| = \sum_{G(y)\in X/G}\ \sum_{x\in G(y)}|G_x| \overset{2.3.}{=} \sum_{G(y)\in X/G}\ \sum_{x\in G(y)}|G_y| \\ = \sum_{G(y)\in X/G}|G(y)|\cdot|G_y| \overset{2.}{=} \sum_{G(y)\in X/G}|G| = |X/G|\cdot|G|\end{aligned}$$

Zuletzt muss noch durch $|G|$ geteilt werden.

$$\sum_{g\in G}|X_g| = |X/G|\cdot|G| \iff |X/G| = \frac{1}{|G|}\cdot\sum_{g\in G}|X_g|$$

□

5 Beispiele

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, wie das Lemma von Burnside angewendet werden kann. Im wesentlichen suchen wir immer nach einer Gruppenwirkung und nach der Größe der Fixmenge von jedem Gruppenelement.

5.1 Färbungen eines Würfels

Die sechs Seiten eines Würfels sollen gefärbt werden. Dafür stehen drei Farben zur Verfügung. Dabei soll die Symmetrie des Würfels nicht ignoriert werden. Das heißt, dass wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch Drehungen ineinander überführt werden können. Die Menge aller Färbungen enthält $729 = 3^6$ Elemente, weil für jede der sechs Seiten eine von drei Farben gewählt wird. Nun müssten wir zu jedem paar aus zwei Färbungen untersuchen, ob es eine Drehung gibt, die eine der beiden in die andere überführt. Stattdessen halten wir fest, dass die Drehungen eines Würfels eine Gruppe bilden und auf die Menge der Färbungen wirken. Um das Lemma von Burnside anzuwenden, müssen wir zu jeder Drehung die größe ihrer Fixmenge finden.

Es gibt insgesamt 24 Drehungen an 13 Rotationsachsen, an denen man einen Würfel drehen kann. Sie alle verlaufen durch den Mittelpunkt des Würfels, darum reicht es einen zweiten Punkt anzugeben, um sie eindeutig zu beschreiben. Bei einer 90°-Drehung eines Würfels um eine senkrechte Rotationsachse, die durch einen Seitenmittelpunkt verläuft, ist die Färbung des Würfels genau dann fixiert, wenn alle vier Mantelflächen die gleiche Farbe haben. In diesem Fall dürfen wir nur drei mal(für Decke, Boden und 4× Mantel) statt sechs mal(für alle Seiten) eine Farbe wählen. Eine ähnliche Überlegung müsste für alle anderen Drehungen angestellt werden.

definierender Punkt	Anzahl der Achsen	Drehwinkel	Anzahl freier Wahlen	$\lvert X_g \rvert$
Flächenmittelpunkt	3	90°	3	3^3
		270°	3	3^3
		180°	4	3^4
Kantenmittelpunkt	6	180°	3	3^3
Ecke	4	120°	2	3^2
		240°	2	3^2

Die Identität fixiert natürlich alle Färbungen. Jetzt können alle Werte in das Lemma eingesetzt werden:

$$\frac{1}{24} \cdot (3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2 + 3^6) = \frac{1368}{24} = 57$$

Wegen des Lemmas von Burnside wissen wir nun, dass es 57 verschiedene Färbungen eines sechsseitigen Würfels gibt. In Abbildung 1 ist das Ergebnis visualisiert.

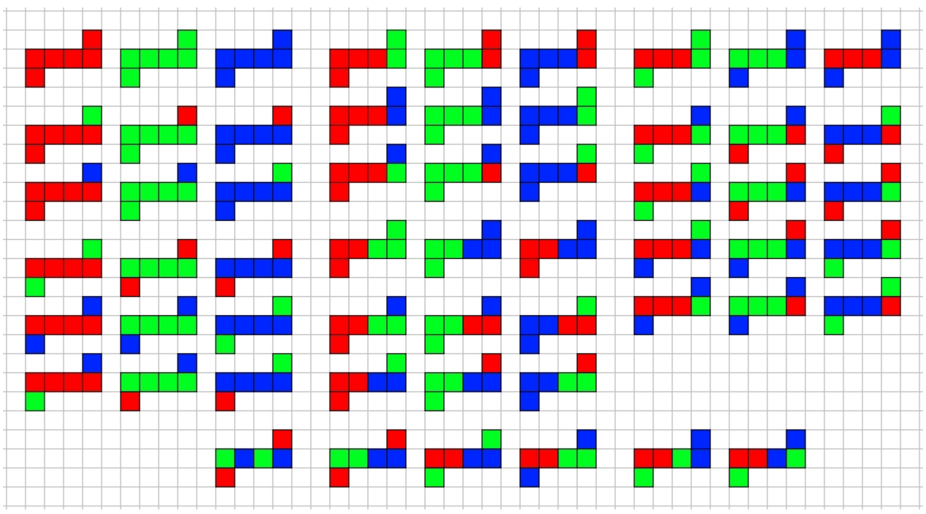

Abb. 1

6 Quellenverzeichnis

6.1 Internetquellen

Schüler, A. (2006). Abzählen von Flärbungen — Das Cauchy-Frobenius- oder Burnside-Lemma. Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik. http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/schueler-06-1.pdf

6.2 Abbildungen

Alle enthaltenen Abbildungen wurden speziell für dieses Dokument erstellt.

7 Anhang

Hier sind die Textabschnitte, die in der aktuellen Version der Ausarbeitung nicht verwendet werden, und ein alternatives Deckblatt.

Dreiklänge

Die Musiktheorie unterscheidet zwischen zwölf Tönen. Diese sind c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais und h. [2] Die zwölf Töne haben jeweils einen Halbton Abstand zu ihren Nachbarn und wiederholen sich. h und c sind genauso Nachbarn wie c und cis oder cis und d. Ein Dreiklang ist das Zusammenklingen von drei verschiedenen Tönen. Dementsprechend modellieren wir einen Dreiklang als eine dreielementige Teilmenge von $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$. Aus jedem Dreiklang können zwei Umkehrungen gebildet werden, indem man entweder den untersten Ton um zwölf Halbtöne erhöht, oder den höchsten Ton um zwölf Halbtöne erniedrigt. Dieser Vorgang hat allerdings keine Auswirkung auf die Teilmenge. Außerdem kann jeder Dreiklang transponiert werden. Dabei wird jeder Ton des Dreiklangs gleichmäßig um einen bis elf Halbtöne erhöht oder erniedrigt. In Abbildung 2 ist jeweils ein Beispiel zur Umkehrung und Transposition gegeben. Durch Umkehrung wird $\{e, g, c\}$ zu $\{g, c, e\}$, weil der unterste Ton um zwölf Halbtöne erhöht wird. Die Transposition erhöht alle Töne gleichmäßig um zwei Halbtöne. So wird $\{e, g, c\}$ zu $\{fis, a, d\}$.

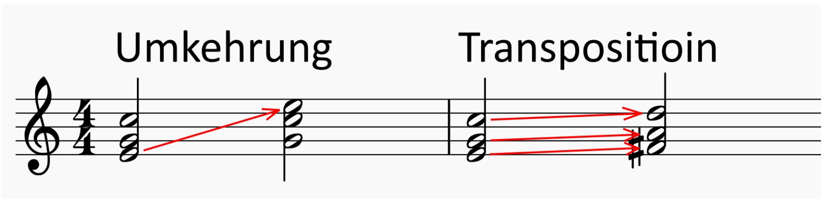

Abb. 2

Nun wollen wir mit dem Lemma von Burnside herausfinden wie viele verschiedene Dreiklänge es gibt. Zwei Dreiklänge gelten als verschieden, wenn einer nicht durch Umkehrung oder Transposition des anderen erhalten werden kann.

Jetzt ist es praktisch, dass die Darstellung als Teilmengen nicht auf Umkehrung reagiert. Die verbleibenden Transpositionen bilden eine Gruppe, die zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ isomorph ist und folglich zwölf Elemente hat.

[2] Zu Gunsten der Übersichtlichkeit wird enharmonische Verwechslung nicht berücksichtigt.

Im Folgenden soll die Transposition um $i \in \{0, \ldots, 11\}$ Halbtöne nach oben mit t_i bezeichnet sein. t_0 entspricht dabei der Identität.

Wenn ein Dreiklang von t_1 fixiert werden soll, dann muss für jeden Ton der Halbton drüber auch enthalten sein. Daraus folgt, dass alle Töne enthalten sind und die Menge keinen Dreiklang mehr repräsentiert. Es ist also notwendig, dass der Dreiklang mindestens zwölf Töne enthält, damit er von t_1 nicht verändert wird. Dieser Gedanke ist auf alle anderen Transpositionen außer t_0 anwendbar und das Ergebnis ist in der zweiten Spalte der folgenden Tabelle festgehalten. Für die meisten Elemente reicht das schon aus, uum eine leere Fixmenge zu folgern.

Transposition	min. Töne	$\lvert X_g \rvert$
id		220
t_1	12	0
t_2	6	0
t_3	4	0
t_4	3	4
t_5	12	0
t_6	2	0
t_7	12	0
t_8	3	4
t_9	4	0
t_{10}	6	0
t_{11}	12	0

t_6 ist besonders, weil die Abbildung nur vorgibt, dass für jeden Ton der Ton sechs Halbtöne drüber auch enthalten sein muss. Allerdings zwingt uns diese Regel einen vierten Ton auf, wenn wir den dritten hinzufügen. Deshalb ist die Fixmenge von t_6 ebenfalls leer. t_4 und t_8 fixieren beide die Dreiklänge aus $\{\{c, e, gis\}, \{cis, f, a\}, \{d, fis, ais\}, \{dis, g, h\}\}$. Nun können alle Werte eingesetzt werden:

$$\frac{1}{12} \cdot (220 + 4 + 4) = \frac{228}{12} = 19$$

Es gibt also 19 verschiedene Dreiklänge. Ein Repräsentantensystem

$$\begin{aligned}\{&\{c, cis, d\}, \{c, cis, dis\}, \{c, d, dis\}, \{c, cis, e\}, \{c, dis, e\},\\ &\{c, cis, f\}, \{c, e, f\}, \{c, cis, fis\}, \{c, f, fis\}, \{c, d, e\},\\ &\{c, d, f\}, \{c, dis, f\}, \{c, d, fis\}, \{c, e, fis\}, \{c, d, g\},\\ &\{c, dis, fis\}, \{c, dis, g\}, \{c, e, g\}, \{c, e, gis\}\}\end{aligned}$$

Gruppe

Eine Gruppe ist ein Tupel $(G, *)$ wobei G eine Menge und $*$ eine Abbildung $* : G \times G \longrightarrow G$ ist, für die folgende Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned}\exists e \in G\colon \forall g \in G\colon e * g = g \\ \forall g \in G\colon \exists g^{-1} \in G\colon g * g{-}1 = e \\ \forall g, h, j \in G\colon (g * h) * j = g * (h * j)\end{aligned}$$

Gruppenwirkung

Sie $(G, *)$ eine Gruppe, e das neutrale Element in G und X eine Menge. Eine Gruppenwirkung ist eine Abbildung, die jedem Element aus G eine Abbildung von X nach X zuordnet.

$$\begin{aligned}G &\longrightarrow Abb(X) \\ g &\longmapsto (g : X \longrightarrow X)\end{aligned}$$

Dabei sollen folgende Eigenschaften gelten:

$$\begin{gathered}e(x) = x \\ \forall g, h \in G\colon h(g(x)) = (h * g)(x)\end{gathered}$$

Zerlegung von X

In der Einleitung habe ich behauptet, dass es um Äquivalenzklassen geht. In diesem Abschnitt möchte ich die Verwendung dieses Begriffs rechtfertigen.
Es seien $(G, *)$ eine Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann ist $\sim$ definiert durch

$$x \sim y \iff \exists g \in G\colon y = g(x)$$

eine Äquivalenzrelation auf X.

Beweis

[1.] Sei e das neutrale Element in G.

$$\begin{aligned}&\forall x \in X\colon e(x) = x \\ \Longrightarrow\ &\forall x \in X\colon x \sim x\end{aligned}$$

$\implies \sim$ ist reflexiv.
[2.] Seien $x, y \in X$ und $x \sim y$.

$$x \sim y \implies \exists g \in G\colon y = g(x)$$

Sei $g \in G$, sodass $y = g(x)$.

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) \iff g^{-1}(y) = (g^{-1} * g)(x) \\ &\iff g^{-1}(y) = e(x) \iff g^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

g^{-1} liegt in G. Darum gilt $y \sim x$.
$\implies \sim$ ist symmetrisch.
[3.] Seien $x, y, z \in X$, $x \sim y$ und $y \sim z$.

$$x \sim y \wedge y \sim z \implies \exists g, h \in G\colon y = g(x) \wedge z = h(y)$$

Seien $g, h \in G$, sodass $y = g(x)$ und $z = h(y)$.

$$z = h(y) = h(g(x)) = (h * g)(x)$$

Weil $(h * g)$ eine Element in G ist, gilt $x \sim z$.
$\implies \sim$ ist transitiv.
Daraus folgt, dass $\sim$ alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt.

$\square$

Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Menge X in disjunkte Äquivalenzklassen. Am Beispiel der Färbungen eines Würfels kann man sehen, dass die Zerlegung von X auf Anhieb nicht vorstellbar ist, weil die Menge der Färbungen zu groß ist und zu viele Drehungen berücksichtigt werden müssen. Um die Situation vollständig zu erfassen, müsste man sich ein Diagramm mit 729 bunten würfeln und 6132 Verbindungslinien vorstellen können. Die Anzahl der Verbindungslinien kann konkret angegeben werden, weil in jeder Äquivalenzklasse alle Elemente paarweise miteinander verbunden sein müssen und die Anzahl der Elemente pro Äquivalenzklasse aus dem Repräsentantensystem in Abbildung 1 hergeleitet werden kann. In so einem Diagramm könnte man die Äquivalenzklassen abzählen.

Name: Sebastian Szymanek
Matrikelnummer: 5274533

Das Lemma von Burnside

Proseminar zur Diskreten Mathematik I