Tag der Mathematik 2016

Mathematischer Wettbewerb, Klassenstufe 11–12/13

30. April 2016, 9.00–12.00 Uhr

Aufgabe 1 Zeigt: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, kann nicht als Summe von zwei periodischen Funktionen geschrieben werden. (Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn es eine Zahl $p > 0$ („Periode“) gibt, so dass $g(x) = g(x + p)$ für alle x gilt. Zum Beispiel ist die Sinusfunktion periodisch mit $p = 2\pi$.)

Lösung. Nehmen wir an, es gäbe periodische Funktionen g_1 und g_2 mit Perioden $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 = g_1(x) + g_2(x) \tag{1}$$

gilt. Ersetzt man x durch $x + p_1$, sieht man

$$(x + p_1)^2 = g_1(x + p_1) + g_2(x + p_1),$$

also

$$x^2 + 2p_1x + p_1^2 = g_1(x) + g_2(x + p_1) \tag{2}$$

für alle x, da g_1 die Periode p_1 hat. Bilden wir die Differenz von (2) und (1), erhalten wir

$$2p_1x + p_1^2 = g_2(x + p_1) - g_2(x) \tag{3}$$

für jedes x. Schreiben wir nun $h(x) = g_2(x+p_1)-g_2(x)$. Da g_2 die Periode p_2 hat, ist auch h mit der Periode p_2 periodisch: $h(x + p_2) = g_2(x + p_2 + p_1) - g_2(x + p_2) = g_2(x + p_1) - g_2(x) = h(x)$. Wegen (3) müsste dann auch die durch $\ell(x) = p_1x+p_1^2$ definierte Funktion p_2-periodisch sein. Insbesondere wäre $\ell(0) = \ell(p_2)$, was $p_1p_2 = 0$ nach sich zieht. Das steht im Widerspruch zur Bedingung $p_1 > 0$, $p_2 > 0$.

Damit ist die ursprüngliche Annahme widerlegt und die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 2 Im Jahr 2000 organisierte die FU ein Fußballturnier, bei dem die teilnehmenden Mannschaften in zwei Gruppen aufgeteilt wurden, die aber nicht gleich groß zu sein brauchten. Leider sind die Aufzeichnungen über die Anmeldungen verloren gegangen; man weiß nur noch, dass es zwischen 15 und 20 Mannschaften waren. In jeder Gruppe spielte jede Mannschaft gegen jede andere aus derselben Gruppe, aber keine Mannschaft spielte gegen eine Mannschaft der anderen Gruppe. Insgesamt wurden genau halb so viele Begegnungen ausgetragen, wie wenn jede Mannschaft gegen *jedes* andere Team (also nicht nur gegen die aus der eigenen Gruppe) gespielt hätte.

(a) Bestimmt die möglichen Anzahlen von teilnehmenden Teams und die Gruppengrößen.

(b) Wäre es möglich gewesen, die Teams in drei Gruppen aufzuteilen, die wieder nur Spiele untereinander austragen, so dass die Gesamtanzahl der Spiele die gleiche gewesen wäre?

Lösung. (a) Wir bezeichnen die Anzahl der Teams in den beiden Gruppen mit m bzw. n. Nach Voraussetzung gilt $15 \leq m+n \leq 20$. Betrachten wir zuerst die Gruppe mit m Mannschaften. Jede dieser Mannschaften hat gegen jedes der übrigen $m-1$ Teams einmal gespielt; das ergibt scheinbar insgesamt $m(m-1)$ Spiele. Aber jedes Spiel wurde zweimal gezählt, also ist die korrekte Anzahl $\frac{1}{2}m(m-1)$. Dasselbe Argument zeigt, dass in der anderen Gruppe $\frac{1}{2}n(n-1)$ Spiele ausgetragen wurden, und unter allen $m+n$ Mannschaften wären theoretisch $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ Begegnungen möglich. Daher ist nach Voraussetzung

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{(m+n)(m+n-1)}{2}.$$

Umformen ergibt

$$m^2 - m + n^2 - n = \frac{1}{2}(m^2 + 2mn + n^2 - m - n) = \frac{m^2 - m + n^2 - n}{2} + mn$$

und weiter

$$m^2 - m + n^2 - n = 2mn$$

sowie

$$(m-n)^2 = m+n.$$

Daher ist $m+n$ eine Quadratzahl zwischen 15 und 20 (jeweils einschließlich); es folgt $m+n = 16$ und $m-n = 4$ bzw. $= -4$. Im ersten Fall ist $2m = 20$, also $m = 10$, und $n = 6$, im zweiten Fall ist umgekehrt $m = 6$ und $n = 10$.

Es haben 16 Mannschaften teilgenommen, die Gruppen waren 6 bzw. 10 Teams stark, und es wurden $\frac{6\cdot 5}{2} + \frac{10\cdot 9}{2} = 60$ Spiele ausgetragen.

(b) Jetzt seien m, n und t die Anzahl der Teams in den 3 Gruppen. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2} = 60.$$

Umformen führt zu

$$m^2 + n^2 + t^2 - (m+n+t) = 120,$$

und da 16 Teams mitgemacht haben,

$$m^2 + n^2 + t^2 = 136.$$

Wir müssen untersuchen, ob diese Gleichung ganzzahlige Lösungen hat.

Dazu können wir annehmen, dass $0 < t \leq n \leq m$ gilt, denn die Gleichung ist symmetrisch in den drei Variablen. Weiteres Umformen liefert (beachte $n, t > 0$ und $m+n+t = 16$)

$$136 - m^2 = n^2 + t^2 < (n+t)^2 = (16-m)^2 = 256 - 32m + m^2,$$

d.h.

$$0 < 2m^2 - 32m + 120 = 2((m-8)^2 - 4),$$

so dass

$$2 < |m-8|.$$

Da $12^2 > 136$, muss notwendigerweise $m \leq 11$ sein; ferner muss $m \geq 7$ sein, da $3 \cdot 6^2 < 136$. Damit kommt als einzige Lösung für m nur $m = 11$ in Frage. das zieht aber $n^2 + t^2 = 136 - 11^2 = 15$ und $n + t = 16 - 11 = 5$ nach sich, was keine ganzzahlige Lösung besitzt.

Man könnte übrigens auch alle hypothetisch möglichen Fälle für m, nämlich (siehe oben) 7 bis 11, durchgehen und feststellen, dass es keine ganzzahligen Lösungen für n und t gibt: Wenn $m = 7$, dann $n^2+t^2 = 136-7^2 = 87$ und $n+t = 16-7 = 9$; wenn $m = 8$, dann $n^2+t^2 = 136-8^2 = 72$ und $n + t = 8$; wenn $m = 9$, dann $n^2 + t^2 = 136 - 81 = 55$ und $n + t = 7$; wenn $m = 10$, dann $n^2+t^2 = 136-10^2 = 36$ und $n+t = 6$; wenn $m = 11$, dann $n^2+t^2 = 136-11^2 = 15$ und $n+t = 5$. In jedem Fall ist es einfach zu verifizieren, dass die beiden Gleichungen keine ganzzahligen Lösungen haben.

Aufgabe 3 In eine Ebene wurden 66 verschiedene Punkte eingezeichnet und durch je zwei Punkte Geraden gezogen. Insgesamt wurden 2016 verschiedene Geraden gezeichnet. Zeigt, dass es mindestens vier Punkte gibt, die auf einer Geraden liegen.

Lösung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis, d.h., wir nehmen an, dass die zu beweisende Aussage falsch ist, und leiten daraus einen Widerspruch her. Dazu nehmen wir an, dass es keine Gerade gibt, auf der 4 oder mehr Punkte liegen.

Jede Gerade geht durch (mindestens) 2 Punkte. Zunächst begründen wir, dass es 2145 Punktepaare gibt. Jeder der 66 Punkte kann mit einem der 65 übrigen Punkte gepaart werden, aber auf diese Weise wird jedes Punktepaar doppelt gezählt. Daher ist die korrekte Anzahl

$$\binom{66}{2} = \frac{66 \cdot 65}{2} = 2145.$$

Zieht man also durch je 2 der 66 Punkte eine Gerade, erhält man demnach höchstens 2145 mögliche Geraden. Die Geraden sind natürlich nicht allesamt verschieden, weil ja laut Voraussetzung nur 2016 Geraden gezeichnet wurden und auch 3 Punkte auf einer Geraden liegen können.

Nun sei n die Zahl der Geraden, auf der 3 Punkte liegen, (P, Q) bezeichne ein beliebiges Punktepaar. Wir zählen jetzt die zugehörigen Geraden: Wenn (P, Q) nicht auf einer der n Geraden mit 3 Punkten liegt, so gehört zu (P, Q) genau eine Gerade; liegt (P, Q) dagegen auf einer der n Geraden, so zählt die Gerade dreifach zu den insgesamt 2145 Geraden, weil aus den 3 Punkten 3 Paarkombinationen gebildet werden können. (Nach Annahme gibt es keine Geraden mit 4 Punkten.) Die tatsächliche Zahl der Geraden ist 2016, was nach den soeben angestellten Überlegungen gleich $2145 - 2n$ sein muss. Die Gleichung $2016 = 2145 - 2n$ hat aber keine ganzzahlige Lösung, weil $2n$ gerade, 2145 aber ungerade ist.

Folglich gibt es mindestens eine Gerade mit 4 oder mehr Punkten.

Aufgabe 4 Antons Mutter ist sauer, weil Anton den Matheunterricht geschwänzt hat. Sie gibt ihrem Sohn noch eine letzte Chance, ihn nicht bei seinem Lehrer anzuschwärzen und ihm eine Entschuldigung zu schreiben: Dazu gibt sie ihm 20 weiße und 20 schwarze Kugeln sowie zwei leere Kartons. Anton darf nun die Kugeln beliebig auf die beiden Kartons verteilen, wobei er alle Kugeln in die Kartons legen muss. Nachdem er das gemacht hat, wird die Mutter (ohne vorher hinzusehen) einen Karton auswählen und zufällig eine Kugel herausnehmen. Zieht sie eine weiße Kugel, so bekommt der Sohn ein Entschuldigungsschreiben.

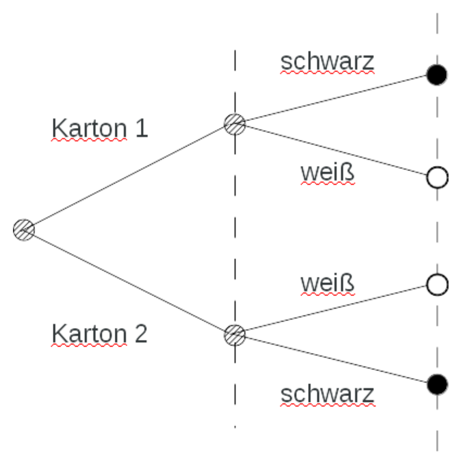
Wie muss er die Kugeln auf die Kartons verteilen, um seine Chancen zu optimieren?

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Antons Mutter eine weiße Kugel zieht, lässt sich mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen ausdrücken:

$$P(\text{weiß}) = P(\text{weiß}|\text{Karton } 1)P(\text{Karton } 1) + P(\text{weiß}|\text{Karton } 2)P(\text{Karton } 2)\,.$$

Dabei steht $P(\text{weiß})$ für die Wahrscheinlichkeit, dass eine weiße Kugel gezogen wird, $P(\text{Karton } 1)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass Antons Mutter Karton Nr. 1 wählt, $P(\text{weiß}|\text{Karton } 1)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine weiße Kugel zieht, wenn sie Karton 1 gewählt hat usw. (Diese Wahrscheinlichkeiten hängen natürlich von der Verteilung der Kugeln ab.)

Als Baumdiagramm sieht das Ganze so aus:



Wir können davon ausgehen, dass Antons Mutter keine besondere Präferenz für einen der beiden Kartons hat; das bedeutet

$$P(\text{Karton } 1) = P(\text{Karton } 2) = \frac{1}{2}\,.$$

Um seine Chancen zu optimieren, muss Anton also die Kugeln so auf die beiden Kartons verteilen, dass die Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{weiß}) = \frac{1}{2}\left(P(\text{weiß}|\text{Karton } 1) + P(\text{weiß}|\text{Karton } 2)\right)\,,$$

maximal wird. Nun gilt

$$0 \leq P(\text{weiß}|\text{Karton } 1) \leq 1,\ \ 0 \leq P(\text{weiß}|\text{Karton } 2) \leq 1\,,$$

allerdings können nicht beide Wahrscheinlichkeiten gleichzeitig 1 sein, denn dafür müsste Anton die schwarzen Kugeln verschwinden lassen; er muss aber alle Kugeln in die Kartons legen.

Anton überlegt nun, dass das Beste, was er tun kann, ist, in einen der Kartons (z.B. Karton 1) nur weiße Kugeln zu legen, so dass seine Mutter mit Sicherheit eine weiße Kugel zieht, und in den anderen möglichst viele weiße Kugeln, so dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel aus dem anderen Karton zu ziehen, maximal wird. Daher legt er eine einzige weiße Kugel in Karton 1 und alle anderen Kugeln in Karton 2. Mit dieser Strategie ist die Wahrscheinlichkeit, dass er davonkommt,

$$P(\text{weiß}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{19}{39}\right) \approx 0{,}74\,.$$

Dass diese Verteilung der Kugeln tatsächlich optimal ist, sieht man, indem man sich die Summe der bedingten Wahrscheinlichkeiten für den Fall hinschreibt, dass im ersten Karton w weiße und s schwarze Kugeln liegen:

$$P(\text{weiß}|\text{Karton 1}) + P(\text{weiß}|\text{Karton 2}) = \frac{w}{w+s} + \frac{20-w}{(20-w)+(20-s)} \tag{1}$$

Wenn in beiden Kartons schwarze Kugeln liegen, ist $1 \leq s \leq 19$. Der Summand

$$\frac{w}{w+s} = 1 - \frac{s}{w+s}$$

wächst mit w; da höchstens 19 weiße Kugeln im Karton liegen (die Wahl $w = 20$ ist wegen $P(\text{weiß}) = \frac{1}{2}(P(\text{weiß}|\text{Karton 1}) + 0) \leq 0{,}5$ gewiss nicht optimal), folgt

$$\frac{w}{w+s} \leq \frac{19}{19+s}.$$

Genauso ist der zweite Summand in (1) am größten, wenn $20 - w$ am größten, also w am kleinsten (d.h. $w = 1$) ist:

$$\frac{20-w}{(20-w)+(20-s)} \leq \frac{19}{39-s}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\text{weiß}|\text{Karton 1}) + P(\text{weiß}|\text{Karton 2}) &\leq \frac{19}{19+s} + \frac{19}{39-s} = \frac{19((39-s)+(19+s))}{(19+s)(39-s)} \\ &= \frac{19 \cdot 58}{(19+s)(39-s)}. \end{aligned}$$

Um das für $1 \leq s \leq 19$ abzuschätzen, schreibe $\sigma = s - 10$, also $|\sigma| \leq 9$. Dann ist

$$\frac{1}{(19+s)(39-s)} = \frac{1}{(29+\sigma)(29-\sigma)} = \frac{1}{29^2 - \sigma^2} \leq \frac{1}{29^2 - 9^2}$$

und

$$P(\text{weiß}) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{19 \cdot 58}{29^2 - 9^2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{19 \cdot 58}{29^2 - 10^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{19 \cdot 58}{39 \cdot 19} = \frac{1}{2} \cdot \frac{58}{39} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{19}{39}\right);$$

der letzte Term ist genau die Wahrscheinlichkeit bei Antons Strategie. Damit ist gezeigt, dass es nicht optimal ist, schwarze Kugeln in beide Kartons zu legen.

Enthält einer der Kartons nur weiße Kugeln, sagen wir w Stück, so ist

$$P(\text{weiß}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{20-w}{40-w}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{20}{40-w}\right)$$

maximal für $w = 1$.

Das beweist die Optimalität von Antons Strategie, in einen der Kartons genau eine weiße Kugel und in den anderen Karton alle andere Kugeln zu legen.

Alternativ kann man kürzer so argumentieren. Es sei k_1 die Anzahl *aller* Kugeln im ersten Karton und k_2 die Anzahl *aller* Kugeln im zweiten Karton. Es sei k die kleinere dieser Zahlen, also $1 \leq k \leq 20$. Nun bezeichnen wir die Anzahl der weißen Kugeln in diesem Karton mit w. Dann gilt

$$P(\text{weiß}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{w}{k} + \frac{20-w}{40-k}\Big).$$

Wir werden zeigen, dass diese Summe für $k = 1$ und $w = 1$ maximal ist, was Antons Strategie entspricht.

Dazu halten wir k zunächst fest und überlegen, dass für festes k (≤ 20) die Summe mit w wächst. Es ist nämlich für $w < k$

$$\Big(\frac{w+1}{k} + \frac{20-(w+1)}{40-k}\Big) - \Big(\frac{w}{k} + \frac{20-w}{40-k}\Big) = \frac{1}{k} - \frac{1}{40-k} = \frac{40-2k}{k(40-k)} \geq 0$$

und für $k < 20$ sogar > 0. Also wird die Summe für $w = k$ maximal und nimmt den Wert

$$\frac{w}{k} + \frac{20-w}{40-k} = 1 + \frac{20-k}{40-k} = 2 - \frac{20}{40-k}$$

an. Jetzt optimieren wir über k: Der letzten Darstellung entnimmt man, dass unsere Summe für $k = 1$ maximal wird. Das war zu zeigen.