Team Nr.

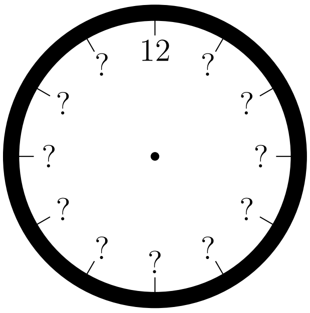
nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 1: Meister Horas Uhr (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 1 Punkt, (b) : 2 Punkte, (c) : 5 Punkte, (d) : 2 Punkte)



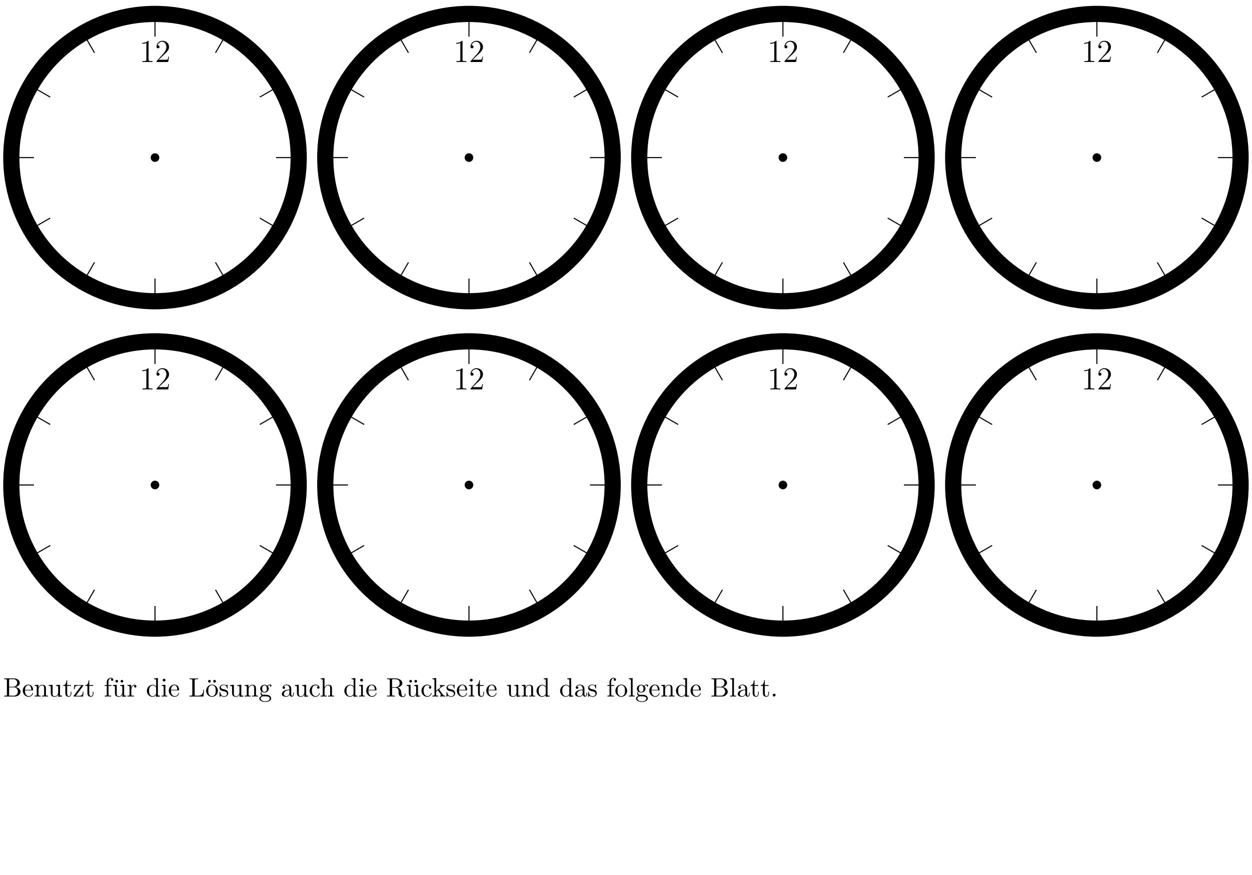
Meister Hora hat eine kuriose Uhr: Bei dieser springt der Stundenzeiger nicht wie üblich jede Stunde um 30°, sondern um 150° im Uhrzeigersinn.

(a) Wie muss das Ziffernblatt aussehen, wenn man trotzdem die Stunden von „1“ bis „12“ ablesen können soll? Dabei soll die „12“ immer oben sein.

(b) Gebt noch zwei andere Winkel als 30° und 150° an, bei denen auch jede Stunde an einer eindeutigen Stelle abgelesen werden kann (und bei denen der Stundenzeiger auch nach genau 12 Stunden wieder am selben Platz ist).

(c) Begründet, dass es außer den genannten und den von euch gefundenen Uhren keine weiteren Uhren gibt, die die in Teilaufgabe (b) genannten Eigenschaften haben.
(Tipp: Betrachtet Winkel als Bruchteile von 360°, also $30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$, $150° = \frac{5}{12} \cdot 360°$ usw.)

(d) Erreicht der Stundenzeiger immer irgendwann wieder die Ausgangsstellung, wenn er jede Stunde um einen Winkel $\frac{p}{q} \cdot 360°$ springt? Dabei ist $\frac{p}{q}$ ein beliebiger Bruch.
Begründet eure Antwort.



Benutzt für die Lösung auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Team Nr.

Aufgabe 2: Lügen und Geheimnistuerei (max. 10 Punkte)

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

(Aufgabe (a): 4 Punkte, (b): 6 Punkte)

(a) Vier Kinder spielen mit einem Ball, dabei geht aus Versehen ein Fenster zu Bruch. Sascha sagt, dass Felix Schuld hat, Felix sagt, dass es Yuri war. Yuri meint, dass er nicht weiß, wer es gewesen sein könnte. Auch Stefan sagt, dass er nicht weiß, wer es gewesen sein könnte.

Wir wissen, dass nur das Kind, welches das Fenster kaputtgemacht hat, *nicht* die Wahrheit sagt. Wer hat dann das Fenster kaputt gemacht?

Begründet eure Antwort.

(b) Yuri und Felix wollen Saschas Geburtstag erraten. Sascha gibt ihnen zehn Termine an, von denen es genau einer ist:

- 8. März, 11. März;
- 8. April, 21. April, 29. April;
- 21. Mai, 23. Mai;
- 12. Juni, 23. Juni, 29. Juni.

Dann flüstert er Yuri den korrekten Monat zu, Felix den korrekten Tag eines Monats (ohne den Monat zu nennen), und er verrät beiden, dass er Yuri den Monat und Felix den Tag gesagt hat.

Daraufhin sagt Yuri: „Ich kenne Saschas Geburtstag nicht, aber ich weiß, dass Felix ihn ebenfalls nicht kennt.“

Felix antwortet: „Stimmt. Doch nun kenne ich Saschas Geburtstag!“

Schließlich sagt Yuri: „Wirklich? Gut, dann kenne ich Saschas Geburtstag nun auch.“

Wann hat Sascha Geburtstag? Begründet eure Antwort.

Platz für die Lösung:

Team Nr.

nur für Korrektur:

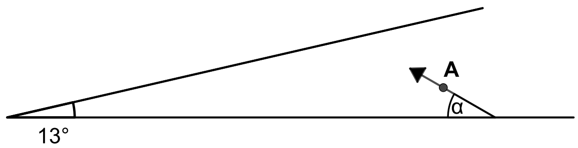
Punkte
Unterschrift

Aufgabe 3: Dreikampf im Mathebillard (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 5 Punkte, (b) : 3 Punkte, (c) : 2 Punkte)

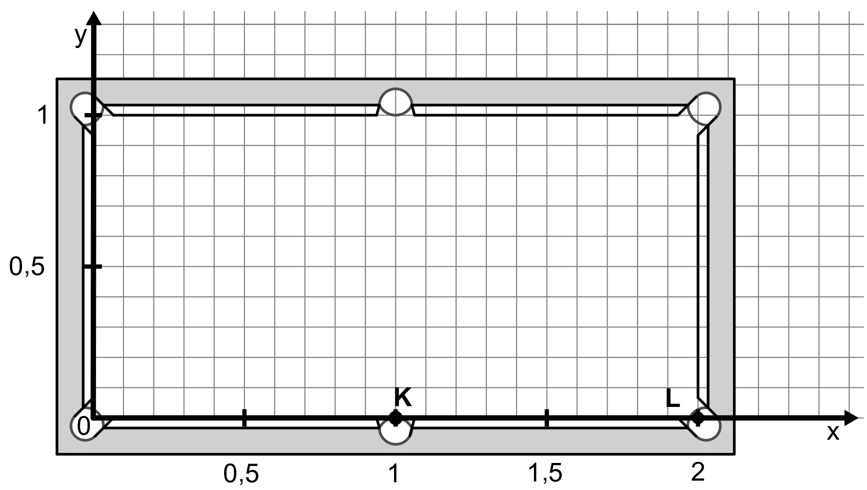
Beim Dreikampf im Mathebillard müssen Trickschüsse nach bestimmten Vorgaben ausgeführt werden.

(a) Die erste Disziplin des Mathebillards findet auf einem etwas ungewöhnlichen Billardtisch statt, bei dem zwei Banden einen Winkel von 13° bilden. Vom Punkt A aus (s. Zeichnung) soll die Kugel so in Richtung der oberen Bande gestoßen werden, dass sie zwischen den Banden hin und her reflektiert wird und nach genau fünf Bandenberührungen wieder auf demselben Weg zu A zurück rollt. Ermittelt, wie groß der Winkel α sein muss.



(b) Bei der zweiten Disziplin wird ein normaler rechteckiger Billardtisch verwendet, wie er auf dem Bild unten aus der Vogelperspektive zu sehen ist. Die Kugel, die im Punkt K (mit den Koordinaten $(1|0)$) liegt, kann über verschiedene Wege exakt zum Punkt L (mit den Koordinaten $(2|0)$) gespielt werden – zum Beispiel über eine Bande, indem man den Randpunkt mit den Koordinaten $(1{,}5\,|\,1)$ anspielt. Findet eine Möglichkeit, wie die Kugel über *zwei* Banden ins Loch gebracht werden kann. Gebt die Koordinaten des Punktes an der Bande an, der als erstes angespielt werden muss. Begründet, warum die Kugel so im Loch landet.

(c) Bei der dritten Disziplin wird wieder der rechteckige Tisch aus (b) verwendet. Dieses Mal soll die Kugel jedoch über *drei* Banden von K aus zum Punkt L gestoßen werden. Findet hierfür zwei verschiedene Möglichkeiten. Gebt jeweils wieder die Koordinaten der anzuspielenden Punkte an der Bande an.



Benutzt für die Lösung die Rückseite und das folgende Blatt.

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 4: Drei Nim-Spiele (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 3 Punkte, (b) : 2 Punkte, (c) : 5 Punkte)

Arzu und Berfin spielen ein Spiel. Von einem Haufen mit anfangs 20 Spielsteinen nehmen beide abwechselnd einen, zwei oder drei Steine weg.
Siegerin ist, wer den letzten Stein wegnimmt.
(Der letzte Stein muss nicht einzeln liegen, um genommen werden zu können.
Sind z.B. noch drei Steine übrig und Arzu nimmt diese drei, ist sie Siegerin.)

a) Arzu beginnt das Spiel. Zeige, dass Berfin stets so spielen kann, dass sie den letzten Stein nimmt und gewinnt.

b) Weil Arzu sauer ist, dass sie verloren hat, ändern beide jetzt die Spielregeln. Jetzt ist diejenige, die den letzten Stein nehmen muss, die Verliererin. Arzu beginnt erneut mit 20 Steinen. Gib eine Strategie an, wie Arzu spielen muss, um garantiert zu gewinnen.

c) Jetzt schlägt Berfin eine neue Regel vor. Wieder soll Arzu beginnen und Gewinnerin ist, wer den letzten Stein nimmt. Sie spielen wieder mit einem Haufen von 20 Steinen, aber Berfin darf ihn vor Arzus erstem Zug in zwei einzelne Haufen mit je mindestens einem Stein teilen. Jetzt nehmen beide wieder abwechselnd Steine, aber sie dürfen nur von *einem* Haufen genommen werden. Von welchem ist dabei egal und man kann auch wechseln. Wie sollte Berfin die 20 Steine aufteilen, damit sie garantiert gewinnen kann? Gib alle Möglichkeiten an.

   Beispiel: Berfin teilt die 20 Steine in zwei Haufen zu 5 und 15 Steinen. Dann nimmt Arzu in ihrem ersten Zug 3 Steine von dem kleineren Haufen, der danach nur noch aus 2 Steinen besteht. Berfin könnte jetzt von dem kleineren Haufen 1 oder 2 Steine nehmen, denn mehr sind nicht da. Oder sie könnte von dem größeren Haufen wie üblich 1, 2 oder 3 wegnehmen.

Platz für die Lösung: