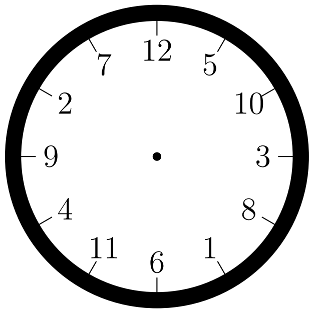
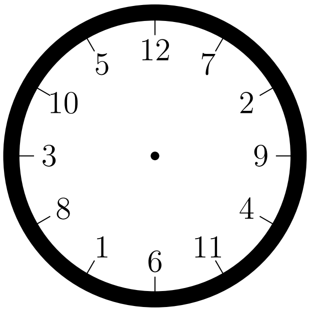
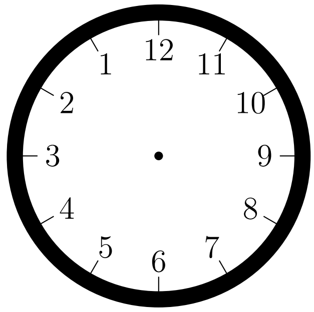
(a) Das Ziffernblatt muss wie folgt aussehen: **(1)**



(b) Die beiden gesuchten Winkel, die die genannten Eigenschaften haben, lauten 210° und 330°. **(2)**
Die so entstehenden Uhren ergeben sich jeweils aus dem Ziffernblatt von Meister Horas Uhr bzw. der normalen Uhr durch Spiegelung an der vertikalen Achse. Denn es gilt:

210°	=	360°-150°	(gespiegelte Uhr von Meister Hora)
330°	=	360°-30°	(gespiegelte normale Uhr)





(c) Zum Einen soll die Uhr nach zwölf Stunden wieder in der Ausgangsstellung sein, sodass der Winkel ein Vielfaches von $\frac{1}{12} \cdot 360°$ sein muss. **(1)**
Es kommen also zunächst die Winkel $\frac{1}{12} \cdot 360°$, $\frac{2}{12} \cdot 360°$, $\frac{3}{12} \cdot 360°$, ... infrage. Da allerdings ein Sprung des Zeigers $\frac{1}{12} \cdot 360°$ dasselbe Ergebnis liefert wie ein Sprung um $\frac{13}{12} \cdot 360°$, $\frac{25}{12} \cdot 360°$, ... (der Zeiger dreht sich nur ein paar Runden mehr) und ein Sprung um $\frac{p}{12} \cdot 360°$ dasselbe Ergebnis liefert wie ein Sprung um $\frac{p+12}{12} \cdot 360°$, ist es nur nötig die Winkel $\frac{1}{12} \cdot 360°$, $\frac{2}{12} \cdot 360°$, ..., $\frac{11}{12} \cdot 360°$ zu betrachten.
(inklusive Begründung) **(1)**
Es sei nun $\alpha = \frac{p}{12} \cdot 360°$ einer der zu betrachtenden Sprungwinkel. Unter den Vielfachen des Spungwinkels $1 \cdot \alpha, 2 \cdot \alpha, ..., 12 \cdot \alpha$ darf nur $12 \cdot \alpha$ wieder ein Vielfaches von 360° sein. Das ist nicht der Fall, wenn der gekürzte Bruch nicht mehr den Nenner 12 hat. **(1)**
Also bei:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

(1)

Ist der Nenner nämlich 2, 3, 4 oder 6, so wird schon nach 2, 3, 4 bzw. 6 Stunden wieder die Ausgangsstellung erreicht. Nur $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ lassen sich nicht mehr kürzen, sodass 30°, 150°, 210° und 330° die einzigen möglichen Winkel sind. Und diese erfüllen die Forderungen, wie wir schon gesehen haben. **(1)**

(d) Springt die Uhr jede Stunde um einen beliebigen Bruch $\frac{p}{q}$ multipliziert mit 360°, so erreicht sie immer irgendwann ihre Ausgangsstellung. **(1)**
Spätestens nach q Stunden (der Nenner des Bruchs) hat sie nämlich ein Vielfaches von 360° zurückgelegt. **(1)**

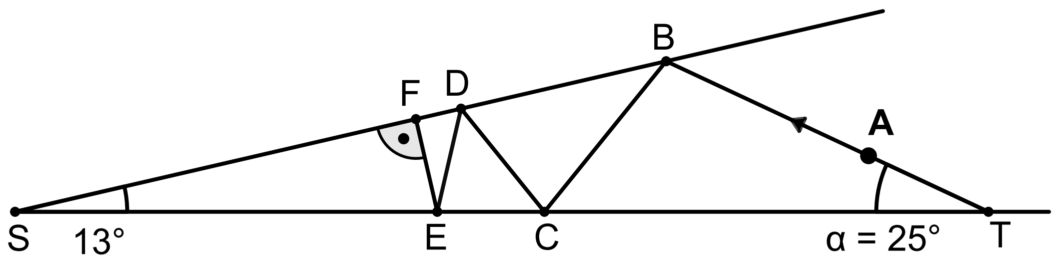
Bepunktungsvorschlag: Siehe oben in Klammern.

(a)
- Felix war es. **(1)**
- Sascha meinte dies und er würde lügen, wenn es Felix nicht gewesen wäre. **(1)**
- Aber Felix gab Yuri die Schuld. Hätte Felix recht, so hätten sowohl Sascha als auch Yuri gelogen. Folglich kann Felix nicht die Wahrheit sagen. **(1)**
- Da Felix damit der Lüge überführt ist, haben alle anderen drei Kinder recht, was auch nicht im Widerspruch zu ihren Aussagen steht: Yuri und Stefan können Recht mit ihrer jeweiligen Behauptung haben, nichts davon mitbekommen zu haben, wie Felix das Fenster kaputt gemacht hat. Sascha hat ebenfalls recht. Also hat nur Felix gelogen. **(1)**

(b)
- Yuri, der den Monat kennt, weiß, das Felix, welcher den Tag kennt, nicht Saschas Geburtstag kennt. Daher fallen der 11. März und der 12. Juni heraus, da dies die einzigen Daten mit einem bestimmten Tag sind. **(1)**
- Folglich können März und Juni auch nicht die Monate von Saschas Geburtstag sein, da Yuri sich sonst nicht sicher sein könnte, dass Felix es nicht weiß. Also hat Sascha im April oder Mai Geburtstag. **(1)**
- Sascha kann nun nicht am 21. Geburtstag haben, denn Felix würde die gleichen Schlüsse ziehen wie wir und damit nur wissen, dass Sascha im April oder Mai Geburtstag hat, der 21. kommt aber in beiden Monaten vor. Folglich hat Sascha am 8. oder 29. April oder am 23. Mai Geburtstag. **(1)**
- Da Felix den Tag kennt und alle drei Tage verschieden sind, kennt er nun Saschas Geburtstag. Da Yuri die Antwort nach Felix Aussage ebenfalls kennt, kommt nur noch der Mai in Frage, da Yuri im April nicht zwischen dem 8. und dem 29. unterscheiden könnte. **(1)**
- Also hat Sascha am 23. Mai Geburtstag. **(2)** (2 Punkte für das richtige Ergebnis)

Bepunktungsvorschlag: Siehe oben in Klammern. Natürlich könnten auch andere Argumentationen bzw. Reihenfolgen der Argumente auftreten. Hier sollten die genannten Fakten und gezogenen Schlüsse ähnlich bepunktet werden wie oben.

(a) Die Lösung benutzt die in der folgenden Zeichnung eingeführten Bezeichnungen.



Da die Kugel auf demselben Wege zu A zurückrollt, wird sie bei F wieder nach E reflektiert. Also ist

$$\angle SFE = \angle EFD = 90^\circ.$$

(Sinnvoller Ansatz: 1 Punkt)

Im Dreieck ΔSEF ist $\angle FES + 90^\circ + 13^\circ = 180^\circ$, also ist $\angle FES = 77^\circ$. Da die Kugel in F reflektiert wird, ist

$$\angle CED = \angle FES = 77^\circ.$$

Im Dreieck ΔFED ist

$$\angle DEF = 180^\circ - 2 \cdot 77^\circ = 26^\circ$$

(Winkelsumme am gestreckten Winkel), und deshalb

$$\angle EDF = 180^\circ - 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ.$$

Mit demselben Argument erhält man im Dreieck ΔDEC

$$\angle EDC = 52^\circ \text{ und } \angle ECD = \angle TCB = 51^\circ.$$

Im Dreieck ΔCDB ergibt sich damit $\angle DCB = 78^\circ$ und $\angle CBD = 38^\circ$.

Im letzten Schritt erhält man wegen der Reflektion in B im Dreieck noch

$$\angle CBA = 90^\circ - 2 \cdot 38^\circ = 104^\circ$$

und schließlich

$$\angle CTA = 180^\circ - 51^\circ - 104^\circ = 25^\circ.$$

(Sinnvolles Nutzen der Winkelsätze: 2 Punkte; richtige Ergebnisse: 2 Punkte; hier sind verschiedene Argumentationen möglich!)

(b) Die Kugel landet beim Anspielen des Bandenpunktes $(0|\frac{2}{3})$ an der linken Bande im Loch.

(Richtige Koordinate: 1 Punkt)

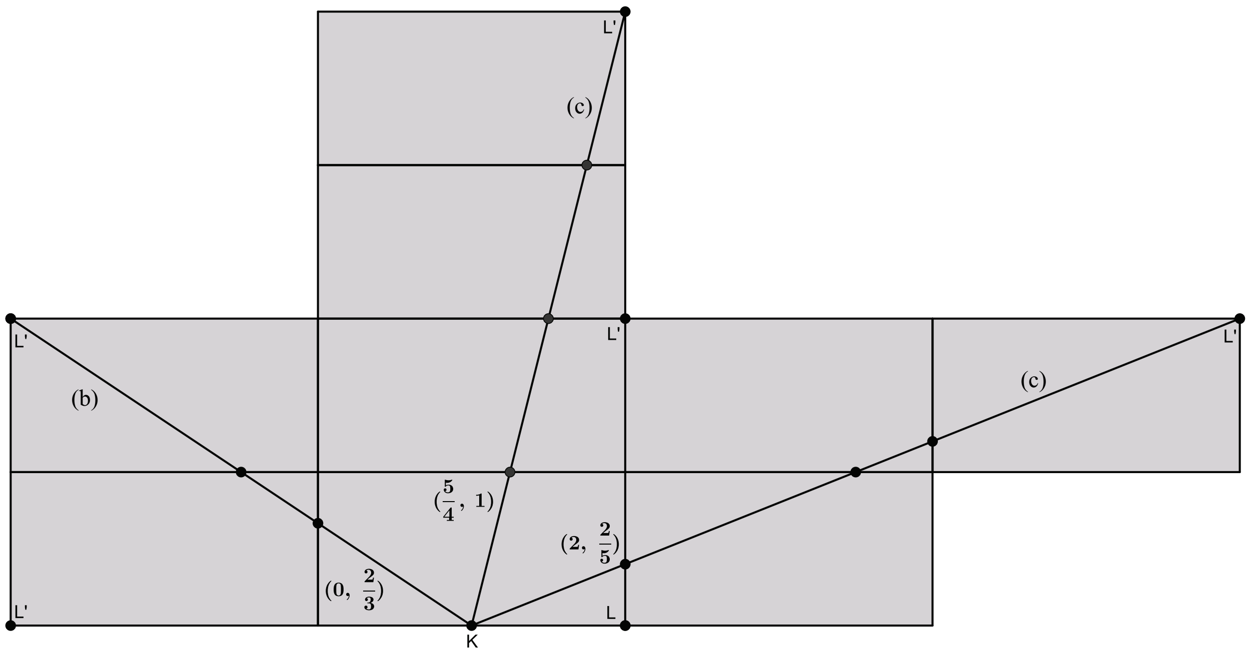
Dies lässt sich beispielsweise begründen, indem man wie im Bild unten das Feld des Billardtisches an den Banden spiegelt. Der Weg von K nach L lässt sich dann als gerade Linie einzeichnen, die genau zwei Banden schneiden muss. Es ergibt sich mithilfe eines Proportionalitäts-/Strahlensatzarguments für die gesuchte y-Koordinate auf der linken Bande

$$\frac{y}{1} = \frac{2}{3},$$

also ist der gesuchte Punkt $(0, \frac{2}{3})$.

(Dies ist die einzige Möglichkeit. Eine Begründung der Eindeutigkeit ist jedoch nicht gefordert.)

(Vollständige Begründung: 2 Punkte)



(c) Die zwei Möglichkeiten über drei Banden sind:

- Anspielen des Bandenpunktes $(1{,}25 \,|\, 1)$ an der oberen Bande (weitere Reflektionen in $(1{,}5 \,|\, 0), (1{,}75 \,|\, 1)$)
- Anspielen des Bandenpunkts $(2 \,|\, 0{,}4)$ an der rechten Bande (weitere Reflektionen in $(1{,}5 \,|\, 1), (0 \,|\, 1{,}2)$).

Zur Begründung, dass diese Möglichkeiten funktionieren, kann der Billardtisch wieder wie in (b) gespiegelt werden; es gibt dann genau diese zwei Möglichkeiten, eines der Löcher L' von K aus auf geradem Wege so zu erreichen, dass die Verbindungslinie genau drei Banden schneidet.

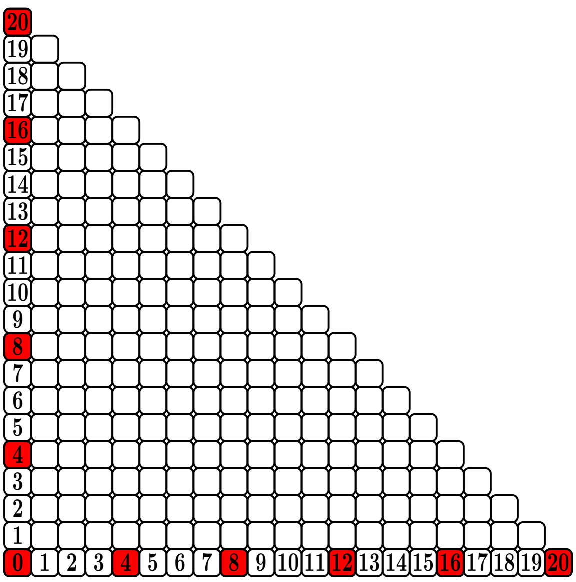
(Dies sind die einzigen zwei Möglichkeiten. Eine Begründung dafür ist jedoch nicht gefordert.)

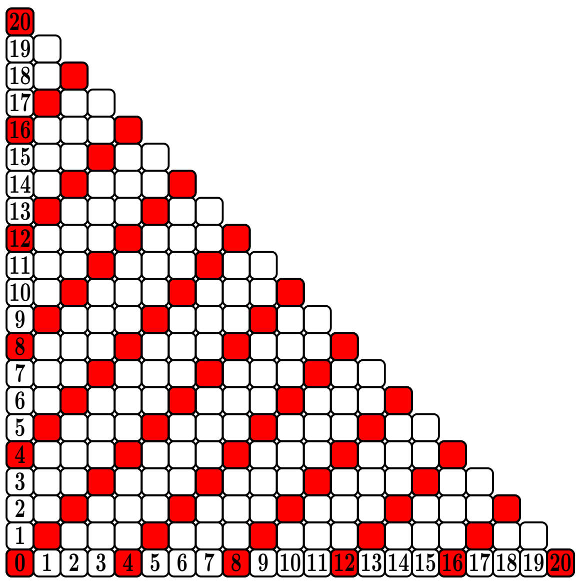
(Richtige Koordinate: je 1 Punkt)

a) Wir spielen das Spiel rückwärts. Offensichtlich verliert eine Spielerin, wenn sie am Zug ist, und vor sich 0 Steine liegen hat. Wir nennen die 0 eine *Verlustposition*. Hat man hingegen 1, 2 oder 3 Steine vor sich, kann man diese nehmen und gewinnt das Spiel. 1, 2 und 3 sind demnach *Gewinnpositionen*. Hat man 4 Steine vor sich liegen und muss 1, 2 oder 3 Steine wegnehmen, bringt man den Gegner automatisch in eine Gewinnposition. Die 4 ist entsprechend ebenso eine Verlustposition wie die 0. Entsprechend sind $4+1=5$, $4+2=6$ und $4+3=7$ wieder Gewinnpositionen und die 8 eine Verlustposition. So kann man nacheinander alle Zahlen bis 20 untersuchen und erhält: Jedes p mit $4|p$ ist eine Verlustposition und damit auch die 20, mit der Arzu beginnen muss. Berfin muss jetzt nur dafür sorgen, dass Arzu stets in einer Verlustposition bleibt. Da diese jeweils 4 voneinander entfernt sind, kann sie nach der einfachen Strategie spielen: Wenn Arzu z Steine zieht, dann zieht Berfin $4-z$. Dann ist die Anzahl der Steine für Arzu um 4 gesunken, und wenn sie vorher in einer Verlustposition war, ist sie es wieder.

b) Wir gehen wie bei a) vor. Jetzt ist aber nicht die 0 eine Verlustposition, sondern die 1. Hat man nur noch einen Stein vor sich liegen, ist man nach den Regeln gezwungen, diesen auch zu nehmen und verliert damit das Spiel. Bei 2, 3 oder 4 Steinen kann man stets regelkonform auf einen Stein reduzieren und damit den Gegner zwingen, diesen zu nehmen. Die Gewinnpositionen sind also 2, 3 und 4 und die nächste Verlustposition ist die 5. Die weiteren Verlustpositionen haben alle die Form $4n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ und die größte, die in dem Spiel auftaucht ist 17. Wenn Arzu in ihrem ersten Zug 3 Steine nimmt und dann die gleiche Strategie wie in a) anwendet, wird Berfin stets in einer Verlustposition landen.

c) Jetzt müssen wir Paare von Zahlen $(x; y)$ darauf untersuchen, ob sie Gewinn- oder Verlustpositionen sind. Offensichtlich reduziert sich das Spiel auf die Variante a), wenn x oder y Null sind. Dafür sind auch Gewinn- und Verlustpositionen bekannt. Die einfachste weitere Verlustposition ist $(1; 1)$. In diesem Fall muss man den letzten Stein von einem Haufen nehmen und bringt damit den Gegner zwangsweise in eine Gewinnposition. Analog kann man alle Positionen der Form $(4n+1; 1)$ bzw. $(1; 4n+1)$ als Verlustpositionen bestimmen. Dies kann für alle Positionen der Form $(4n+a; a)$ bzw. $(a; 4n+a)$ fortgesetzt werden. Letztendlich kann man es vereinfacht so ausdrücken, dass eine Position $(x; y)$ mit $4|(x-y)$ eine Verlustposition ist.
Das Ganze kann man auch grafisch lösen, indem man in einer Tabelle ausgehend von den bekannten Verlustpositionen aus a) die weiteren sukzessive ermittelt.





Erkennbar wird, dass Berfin die Aufteilungen $(2;18)$, $(4;16)$, $(6;14)$, $(8;12)$, $(10;10)$ (und Vertauschungen der Reihenfolge) wählen kann, damit Arzu in einer Verlustposition mit $4|(x-y)$ startet. Ihre Gewinnstrategie ist, dass sie, wenn Arzu von einem Haufen z Steine zieht, entweder vom gleichen Haufen $4-z$ Steine nimmt oder z vom jeweils anderen Haufen.

Bepunktungsvorschlag:

4 a)
- Erkennen einer weiteren Verlustposition, z.B. 4 (1P)
- Verallgemeinerung und Erkennen aller Verlustpositionen (1P)
- Formulieren der Strategie (1P)

4 b)
- Erkennen der 1 als Verlustposition (1P)
- Adaptieren der Strategie aus 4 a) (1P)

4 c)
- Erkennen, dass das Spiel auf die Variante 4a hinausläuft, wenn ein Haufen leer wird (1P)
- Geeignete Formulierung einer Bedingung für die Verlustpositionen: Invariante 4 teilt $|x-y|$ oder Ausfüllen einer Tabelle (3P)
- Angabe der Verlustpositionen bestehend aus 20 Steinen (1P)
  (Achtung: (0;20) und (20;0) entsprechen nicht der Regel, dass zu Beginn kein Haufen leer ist.)

Laut Aufgabenstellung ist es nicht verlangt, eine Gewinnstrategie anzugeben, da dies bereits in die Konstruktion der Verlustpositionen einfließt.