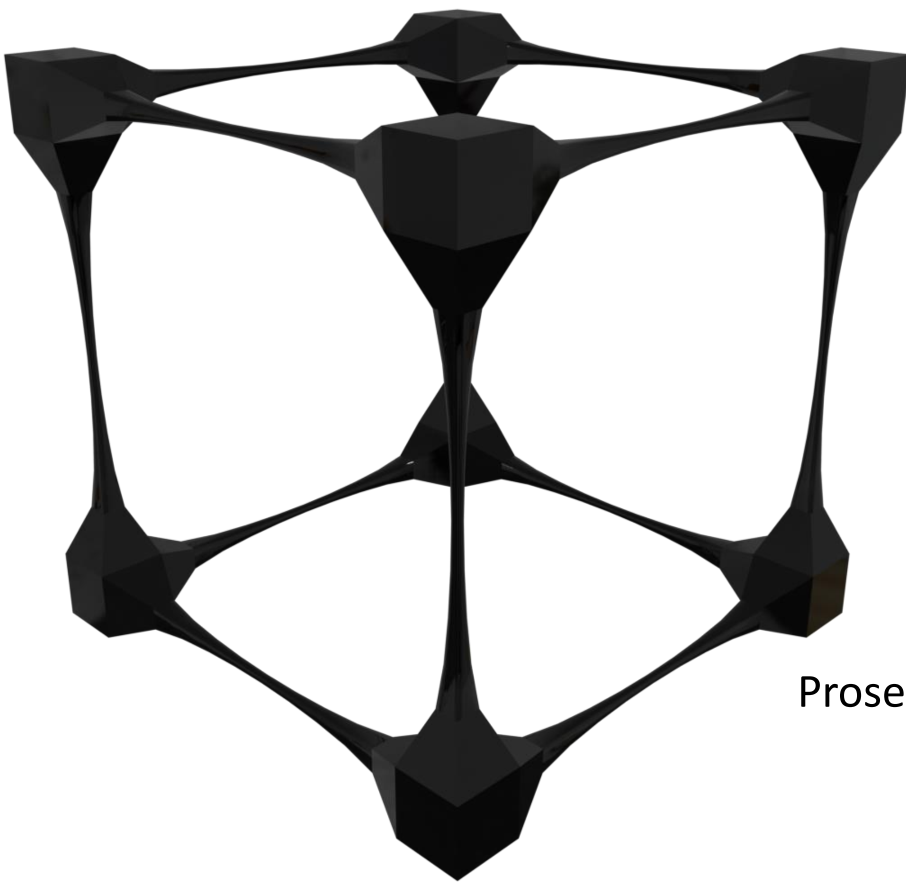
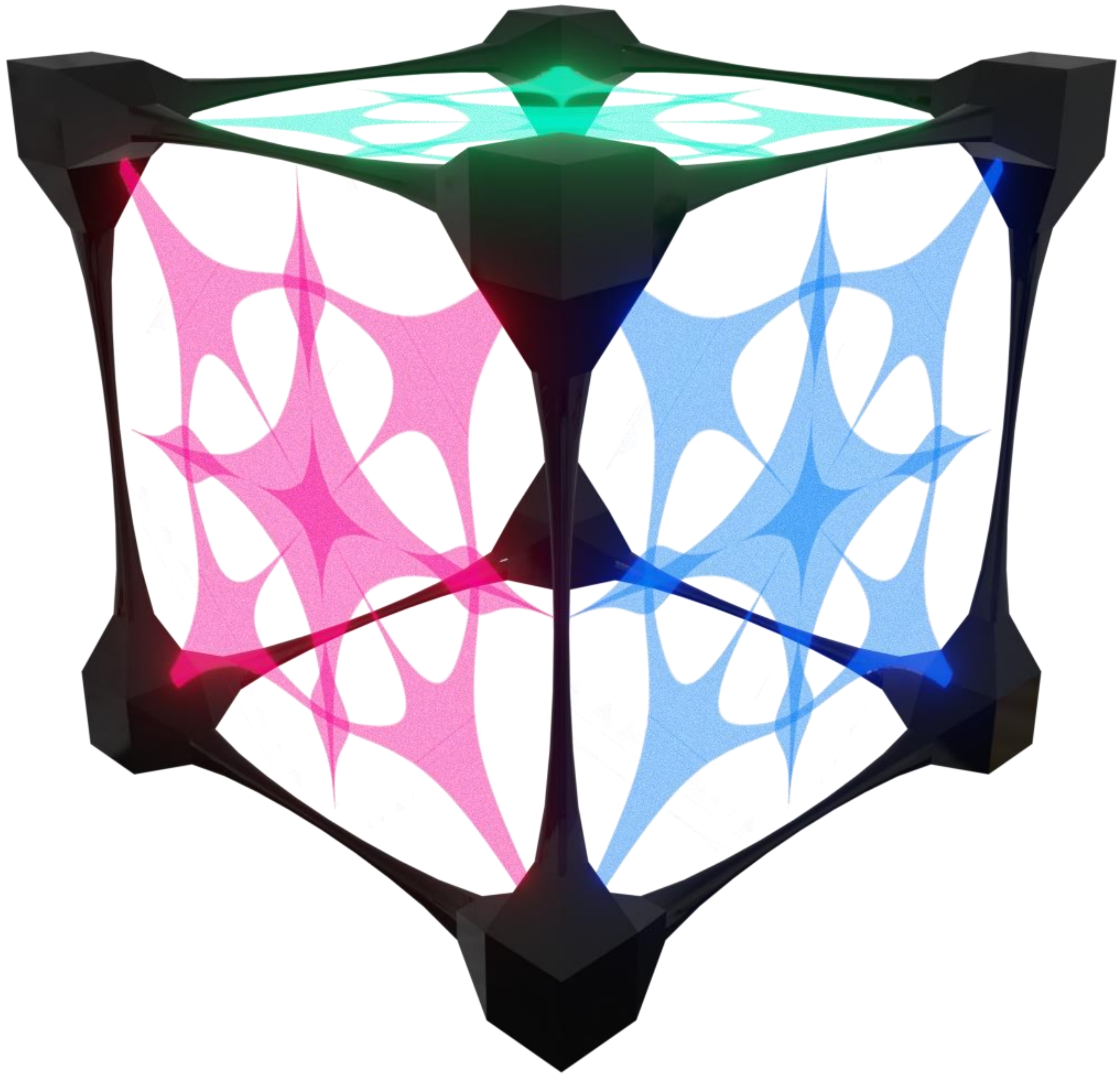
Das Lemma von Burnside



Proseminar zur Diskreten Mathematik

Sebastian Szymanek



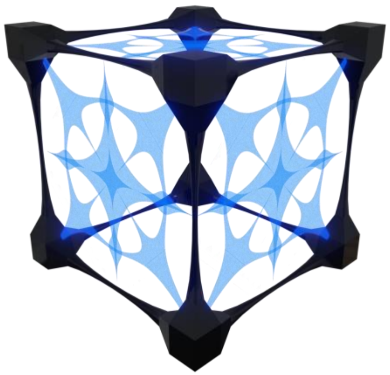
Gruppenwirkung

Sie $(G, *)$ eine Gruppe, e das neutrale Element in G und X eine Menge. Eine Gruppenwirkung ist eine Abbildung, die jedem Element aus G eine Abbildung von X nach X zuordnet.

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow Abb(X) \\ g &\longmapsto (g : X \longrightarrow X) \end{aligned}$$

Dabei sollen folgende Eigenschaften gelten:

$$e(x) = x$$
$$\forall g, h \in G\colon\ h(g(x)) = (h * g)(x)$$



Notation

Es seien X eine Menge, $(G, *)$ eine Gruppe und G wirke auf X.

$$\text{Orbit von } x_0: \quad G(x_0) = \{g(x_0) \mid g \in G\}$$

$$\text{Stabilisator von } x_0: \quad G_{x_0} = \{g \in G \mid g(x_0) = x_0\}$$

$$\text{Fixmenge von } g_0: \quad X_{g_0} = \{x \in X \mid g_0(x) = x\}$$

Orbit-Stabilisator-Satz

Es seien $(G, *)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt für jedes Element x aus X:

$$|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$$

Orbit-Stabilisator-Satz

Es seien $(G,*)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt für jedes Element x aus X:

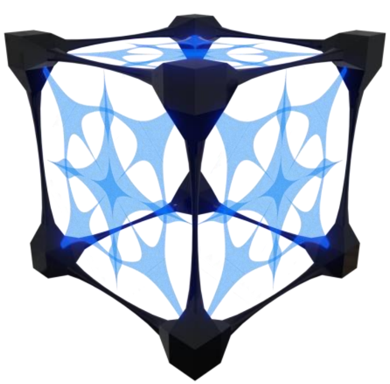
$$|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$$

Beweisskizze:

Es sei x aus X beliebig und $S = \{(g,y) \in G \times X | y = g(x)\}$.

$$G \ni g \longmapsto (g, g(x))$$
$$\Longrightarrow |G| = |S|$$

Es seien y in $G(x)$ und g_0 in G_x. Dann existiert ein g^* in G, sodass $g^*(x) = y$.



$$G_x \ni g_0 \longmapsto (g^* * g_0, y)$$
$$(g^* * g_0)(x) = g^*(g_0(x)) = g^*(x) = y$$
$$\Longrightarrow \sum_{y \in G(x)} |G_x| = |S|$$
$$\Longrightarrow |G(x)| \cdot |G_x| = |G|$$

Gleichheit von Orbits

Elemente aus dem gleichen Orbit, haben den gleichen Orbit.
Es seien x aus X und y aus $G(x)$. Dann gilt:

$$G(x) = G(y).$$

Größe von Stabilisatoren

Die Stabilisatoren von Elementen aus dem gleichen Orbit, sind gleich groß.
Es seinen x aus X und y aus $G(x)$. Dann gilt:

$$|G_x| = |G_y|.$$

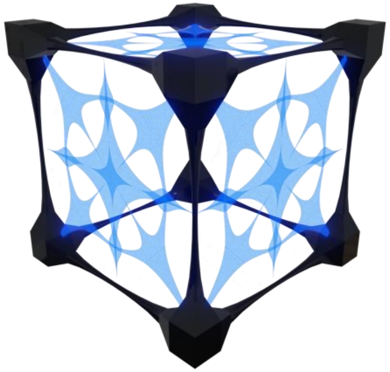
Größe von Stabilisatoren

Die Stabilisatoren von Elementen aus dem gleichen Orbit, sind gleich groß.
Es seinen x aus X und y aus $G(x)$. Dann gilt:

$$|G_x| = |G_y|.$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} & |G(x)| \cdot |G_x| = |G| = |G(y)| \cdot |G_y| \\ \Longrightarrow\ & |G(x)| \cdot |G_x| = |G(x)| \cdot |G_y| \\ \Longrightarrow\ & |G_x| = |G_y| \end{aligned}$$



Fixmengen und Stabilisatoren Satz

Es seien $(G, *)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt:

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

Fixmengen und Stabilisatoren Satz

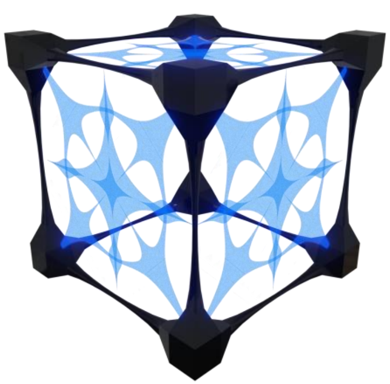
Es seien $(G, *)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt:

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

Sei $T = \{(g, x) \in G \times X | g(x) = x\}$.

$$\sum_{g \in G} |X_g| = |T| = \sum_{x \in X} |G_x|$$



Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Das Lemma von Burnside

$(G,*)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\sum_{g\in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y)\in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y)\in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_y|$$
$$= \sum_{G(y)\in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y)\in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|$$

Fixmengen und Stabilisatoren Satz

Es seien $(G,*)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt:

$$\sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\sum_{g \in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_y|$$
$$= \sum_{G(y) \in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y) \in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|$$

Das Lemma von Burnside

$(G,*)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\sum_{g\in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y)\in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y)\in X/G} \sum_{x\in G(y)} |G_y|$$
$$= \sum_{G(y)\in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y)\in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|$$

Größe von Stabilisatoren

Die Stabilisatoren von Elementen aus dem gleichen Orbit, sind gleich groß. Es seinen x aus X und y aus $G(x)$. Dann gilt:

$$|G_x| = |G_y|.$$

Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\sum_{g \in G} |X_g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_y|$$

$$= \sum_{G(y) \in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y) \in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|$$

Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned}\sum_{g \in G} |X_g| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \ \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \ \sum_{x \in G(y)} |G_y| \\ &= \sum_{G(y) \in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y) \in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|\end{aligned}$$

Orbit-Stabilisator-Satz

Es seien $(G, *)$ eine endliche Gruppe, X eine Menge und G wirke auf X. Dann gilt für jedes Element x aus X:

$$|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$$

Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned} \sum_{g\in G} |X_g| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y)\in X/G} \; \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y)\in X/G} \; \sum_{x \in G(y)} |G_y| \\ &= \sum_{G(y)\in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y)\in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G| \end{aligned}$$

Das Lemma von Burnside

$(G, *)$ sei eine endliche Gruppe und wirke auf eine Menge X. Dann gilt:

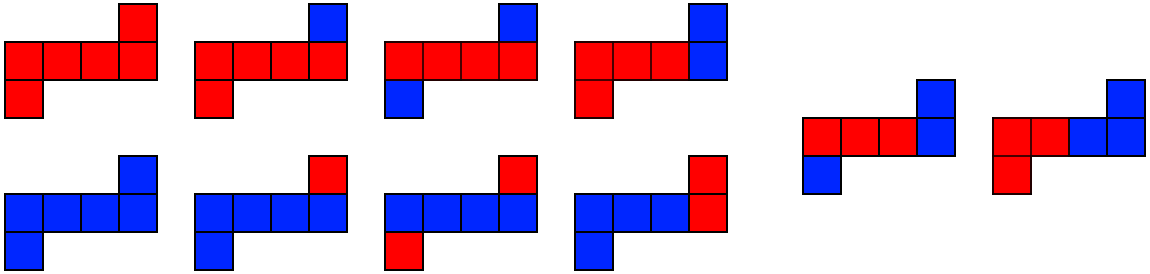
$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Beweisskizze:

$$\begin{aligned}\sum_{g \in G} |X_g| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_x| = \sum_{G(y) \in X/G} \sum_{x \in G(y)} |G_y| \\ &= \sum_{G(y) \in X/G} |G(y)| \cdot |G_y| = \sum_{G(y) \in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|\end{aligned}$$

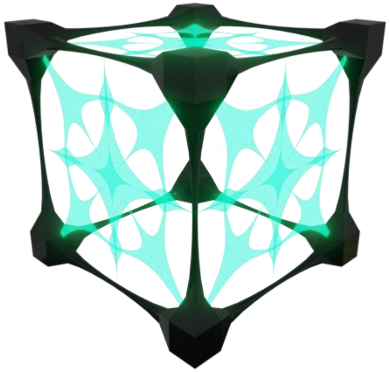
$$\sum_{g \in G} |X_g| = |X/G| \cdot |G| \iff |X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g|$$

Färbungen eines Würfels



Färbungen eines Würfels

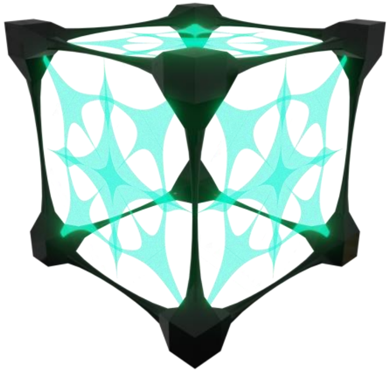
definierender Punkt	Anzahl der Achsen	Drehwinkel	Anzahl freier Wahlen	$\lvert X_g \rvert$
Flächenmittelpunkt	3	90°	3	2^3
		270°	3	2^3
		180°	4	2^4
Kantenmittelpunkt	6	180°	3	2^3
Ecke	4	120°	2	2^2
		240°	2	2^2



Färbungen eines Würfels

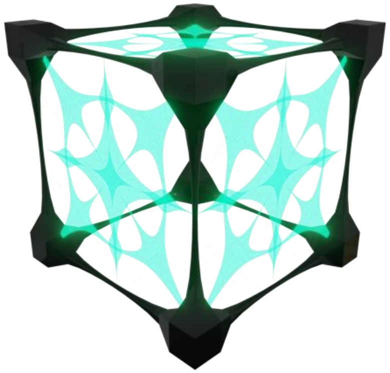
definierender Punkt	Anzahl der Achsen	Drehwinkel	Anzahl freier Wahlen	$\lvert X_g \rvert$
Flächenmittelpunkt	3	90°	3	2^3
		270°	3	2^3
		180°	4	2^4
Kantenmittelpunkt	6	180°	3	2^3
Ecke	4	120°	2	2^2
		240°	2	2^2

$$\frac{1}{24} \cdot (3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^2 + 2^6) = \frac{240}{24} = 10$$



Färbungen eines Würfels

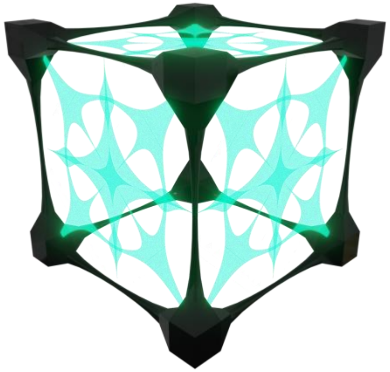
definierender Punkt	Anzahl der Achsen	Drehwinkel	Anzahl freier Wahlen	$\|X_g\|$
Flächenmittelpunkt	3	90°	3	3^3
		270°	3	3^3
		180°	4	3^4
Kantenmittelpunkt	6	180°	3	3^3
Ecke	4	120°	2	3^2
		240°	2	3^2

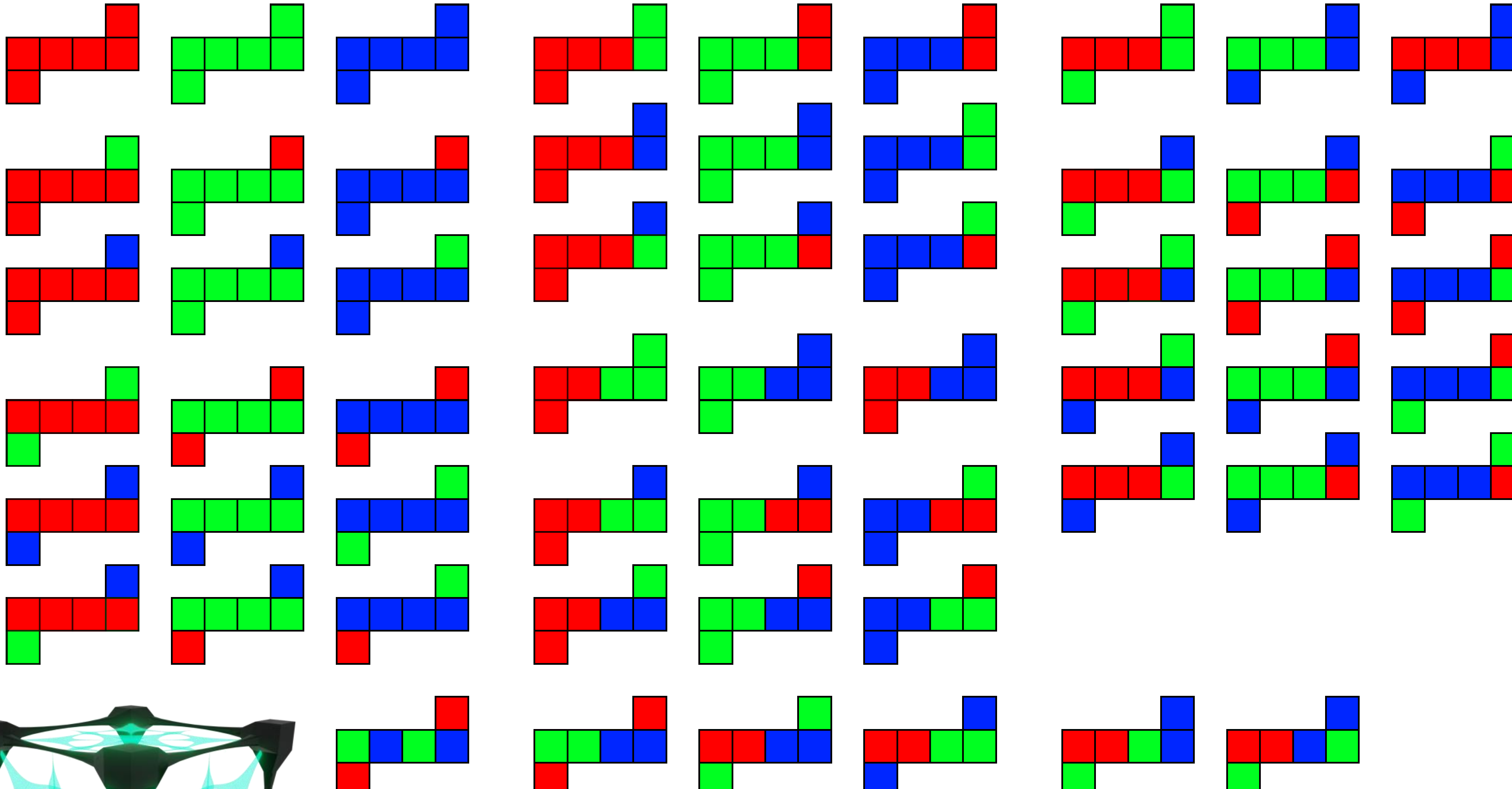


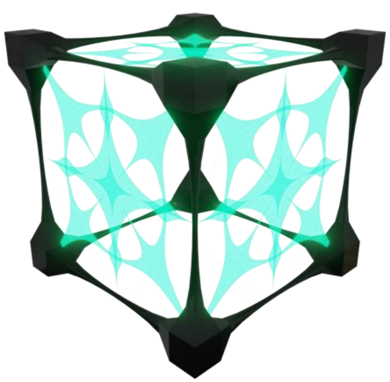
Färbungen eines Würfels

definierender Punkt	Anzahl der Achsen	Drehwinkel	Anzahl freier Wahlen	$\lvert X_g \rvert$
Flächenmittelpunkt	3	90°	3	3^3
		270°	3	3^3
		180°	4	3^4
Kantenmittelpunkt	6	180°	3	3^3
Ecke	4	120°	2	3^2
		240°	2	3^2

$$\frac{1}{24} \cdot (3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^2 + 3^6) = \frac{1368}{24} = 57$$







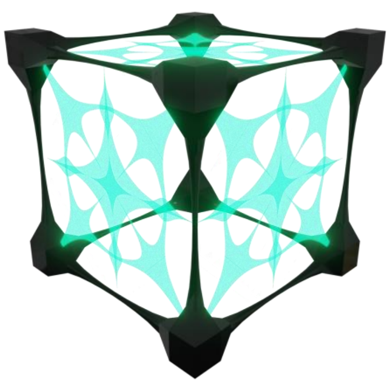
Dreiklänge

Tonvorrat: $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$

Dreiklänge

Tonvorrat: $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$

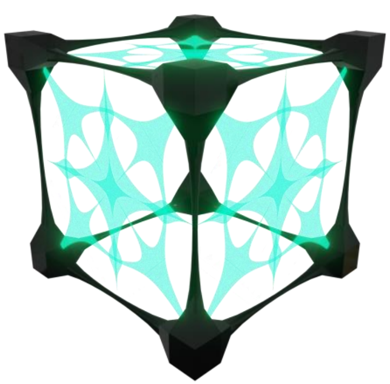
Transposition	min. Töne	$\lvert X_g \rvert$
id		220
t_1	12	0
t_2	6	0
t_3	4	0
t_4	3	4
t_5	12	0
t_6	2	0
t_7	12	0
t_8	3	4
t_9	4	0
t_{10}	6	0
t_{11}	12	0



Dreiklänge

Tonvorrat: $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$

Transposition	min. Töne	$\lvert X_g \rvert$
id		220
t_1	12	0
t_2	6	0
t_3	4	0
t_4	3	4
t_5	12	0
t_6	2	0
t_7	12	0
t_8	3	4
t_9	4	0
t_{10}	6	0
t_{11}	12	0



t_4 und t_8 fixieren: $\{\{c, e, gis\}, \{cis, f, a\}, \{d, fis, ais\}, \{dis, g, h\}\}$.

$$\frac{1}{12} \cdot (220 + 4 + 4) = \frac{228}{12} = 19$$

Dreiklänge

Tonvorrat: $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$

Repräsentantensystem:

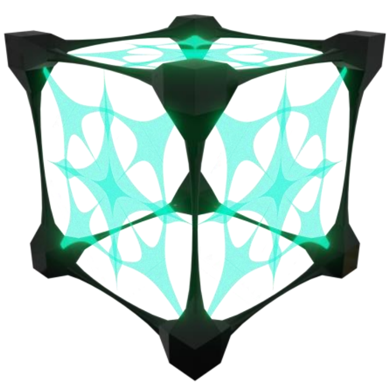
$$\{\{c, cis, d\}, \{c, cis, dis\}, \{c, d, dis\}, \{c, cis, e\}, \{c, dis, e\},$$
$$\{c, cis, f\}, \{c, e, f\}, \{c, cis, fis\}, \{c, f, fis\}, \{c, d, e\},$$
$$\{c, d, f\}, \{c, dis, f\}, \{c, d, fis\}, \{c, e, fis\}, \{c, d, g\},$$
$$\{c, dis, fis\}, \{c, dis, g\}, \{c, e, g\}, \{c, e, gis\}\}$$

Dreiklänge

Tonvorrat: $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$

Repräsentantensystem:

$$\begin{aligned}&\{\{c, cis, d\}, \{c, cis, dis\}, \{c, d, dis\}, \{c, cis, e\}, \{c, dis, e\},\\ &\{c, cis, f\}, \{c, e, f\}, \{c, cis, fis\}, \{c, f, fis\}, \{c, d, e\},\\ &\{c, d, f\}, \{c, dis, f\}, \{c, d, fis\}, \{c, e, fis\}, \{c, d, g\},\\ &\{c, dis, fis\}, \{c, dis, g\}, \{c, e, g\}, \{c, e, gis\}\}\end{aligned}$$



Dreiklänge

Tonvorrat: $\mathbb{T} = \{c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h\}$

Repräsentantensystem:

$$\{\{c, cis, d\}, \{c, cis, dis\}, \{c, d, dis\}, \{c, cis, e\}, \{c, dis, e\},$$
$$\{c, cis, f\}, \{c, e, f\}, \{c, cis, fis\}, \{c, f, fis\}, \{c, d, e\},$$
$$\{c, d, f\}, \{c, dis, f\}, \{c, d, fis\}, \{c, e, fis\}, \{c, d, g\},$$
$$\{c, dis, fis\}, \{c, dis, g\}, \{c, e, g\}, \{c, e, gis\}\}$$